مقدمة
في
نظرية المعلومات
وصياغة الشفرات

الدكتور أبو بكر أحمد السيد
جامعة الكويت

دار القلم
الكويت

مقدمة
في
نظرية المعلومات
وصياغة الشفرات

بسم الله الرحمن الرحيم

فَٱعْلَمْ أَنَّهُۥ لَآ إِلَٰهَ إِلَّا ٱللَّهُ وَٱسْتَغْفِرْ لِذَنۢبِكَ وَلِلْمُؤْمِنِينَ
وَٱلْمُؤْمِنَٰتِ ۗ وَٱللَّهُ يَعْلَمُ مُتَقَلَّبَكُمْ وَمَثْوَىٰكُمْ ﴿١٩﴾

(سورة محمد - ١٩)

مقدمة
في
نظرية المعلومات
وصياغة الشفرات

الدكتور أبو بكر أحمد السيد
جامعة الكويت

الطبعة الأولى

١٤٠٦هـ - ١٩٨٥م

الطبعة الثانية

١٤١٣ هـ - ١٩٩٣ م.

دار القلم للنشر والتوزيع

شارع السور - عمارة السور - الطابق الأول

هاتف: ٢٤٥٧٤٠٧ - ٢٤٥٨٤٧٨ - برقيا توزيعكو

ص.ب ٢٠١٤٦ الصفاة 13062 الكويت

مقـــدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين ، والصلاة والسلام على خاتم المرسلين محمد وعلى آله وصحبه أجمعين . وبعد . .

« الله ابتعثنا لنخرج من شاء من عبادة العباد إلى عبادة الله وحده ، ومن ضيق الدنيا إلى سعتها ، ومن جور الأديان إلى عدل الإسلام » . . هذه هي رسالة الأمة الإسلامية ، ولن تستطيع القيام بها لقيادة البشرية إلى الحق والعدل وعبادة الخالق سبحانه وتعالى إلا إذا برعت وتفوقت في مختلف العلوم وخاصة العلوم الحديثة ، ولن تبلغ أمتنا درجة الأستاذية في هذه العلوم التي تغطرس وانتفش أعداؤنا بتفوقهم علينا فيها إلا إذا أصبحت هذه العلوم ملكا لنا أيضا، ولن نقتنع أنها علوم إسلامية إلا إذا قرأناها بلغة القرآن ، وكتبناها بلغة القرآن ، وأحسسنا روح القرآن تسري فيها ، وبدون ذلك سنظل نوقن أننا غرباء عليها متطفلون على أصحابها . ومن هذه العلوم الحديثة علم «نظرية المعلومات» موضوع هذا الكتاب .

ونظرية المعلومات هي نظرية رياضية تتعلق بدراسة المعلومات والبيانات من حيث قياس مقدارها رياضيا ، ووسائل تخزينها في بعض الأجهزة (كالحاسبات مثلا) ، وأكفأ الطرق لإرسالها من موضع لآخر باستخدام شفرات معينة في أجهزة الاتصال التي تشتمل على أجهزة الإرسال وأجهزة الاستقبال وقنوات الاتصال لنقل المعلومات ، ووسائل اكتشاف وتصحيح الأخطاء التي قد تحدث في عملية التخزين أو الإرسال نتيجة بعض العوامل كالتداخل والضوضاء مثلا ، وأفضل الطرق لتقليل هذه الأخطاء ، وحساب سعات قنوات الاتصال .

وتعتمد نظرية المعلومات في بعض جوانبها على نظرية الاحتمالات ، ولذلك فقد بدأنا الكتاب بفصل تمهيدي لمراجعة بعض قوانين نظرية الاحتمالات التي نحتاج إليها في دراسة نظرية المعلومات ، ويكفي هذا الفصل التمهيدي لمتابعة قراءة الكتاب بسهولة بإذن الله ، وفهم نظرية المعلومات ، فليس لدراسة هذه المقدمة في نظرية المعلومات أي متطلبات سابقة أخرى من علوم الرياضيات أو هندسة الاتصالات والالكترونيات أو علوم الحاسب ، فنظرية المعلومات تقوم على استخدام علاقات رياضية بسيطة ، ولذلك فيمكن لقراء من مجالات مختلفة استيعاب هذه النظرية التي لم تقتصر في تطبيقاتها على نظم الاتصال ومسائل الشفرات وعلوم الحاسب والبرمجة ، وإنما أصبحت تطبق أيضا في مجالات أخرى كالمنطق والاقتصاد ودراسة اللغات .

ويتناول الفصل الأول المفاهيم الأساسية في نظرية المعلومات ، ودراسة المقاييس المختلفة التي تستعمل لقياس المعلومات ، ومعاني هذه المقاييس وخواصها وبعض التطبيقات لاستخدامها . وفي الفصل الثاني ندرس تطبيق هذه المقاييس في نظم الاتصال وقنوات المعلومات ومصادر المعلومات بعد تعريف هذه القنوات والمصادر ، وندرس بشيء من التفصيل بعض القنوات الخاصة التي لها أهمية عملية ، ونحسب سعات هذه القنوات ، وكذلك كفاءة إرسال المعلومات في نظم الاتصال المختلفة ، ثم ندرس القنوات المركبة والتي تتكون من عدة قنوات متصلة على التوالى ، أو على التوازي . والفصل الثالث يختص بدراسة الشفرات ، وأهمية استخدامها ، وأنواعها المختلفة ، وطرق تكوينها ، وكفاءتها ، واكتشاف الأخطاء التي قد تحدث فيها ، وطرق تصحيح هذه الأخطاء .

وفي نهاية كل فصل مجموعة من التمرينات ، وكذلك توجد بعض التمرينات العامة على نظرية المعلومات بعد انتهاء فصول الكتاب ، وتشمل هذه التمرينات العامة بعض التطبيقات العملية التي تربط بين محتويات الفصول الثلاثة . كما توجد حلول وأجوبة لكافة تمرينات الكتاب يمكن للقارىء الرجوع إليها بعد قيامه بحل التمرينات ، كما يمكنه الاستعانة في حل هذه التمرينات بجداول الاحتمالات

ومقاييس المعلومات الموجودة قرب نهاية الكتاب .

ندعو الله عز وجل أن يتقبل هذا العمل وسائر أعمالنا خالصة لوجهه الكريم ، وأن يوفقنا للسعي من أجل إنشاء الجيل المؤمن الذي يجمع بين العقيدة والعلم ، ويؤمن برسالة هذه الأمة الإسلامية ، وخلود هذه الرسالة ، وصلاحيتها لكل عصرومصر ، وأنها هي المنقذة للعالم أجمع من النهاية الأليمة التي ترتقبه ، ومن المستنقع الذي يتردى فيه ، فإن عبوديتنا التعليمية للغرب قد كسرت خواطر الكثير من الشباب ، وأوهنت قلوبهم ، وجعلتهم ظلا لشباب الغرب ، وعبيدا للدينار والدرهم ، غايتهم من التعليم الوظيفة والراتب ، والجاه والمركز ، كما أن الكثيرمنهم أصبح يتأرجح في أرجوحة بين قوتين : قوة رغبته في اتباع تعليمات دينه ، وقوة رغبته في اتباع منهج وفكر الغربيين الذين درس كتبهم ، وآمن بعظمتهم ، وتعلم بلغتهم . . ولابد من إيقاف ذلك التأرجح بإعادة الثقة بالإسلام وشموله وعظمته إلى نفوس الشباب . ومن أولى الخطوات إلى هذه الغاية إزالة هذه التناقضات في معاهدنا التعليمية ، وإعادة الثقة بشخصيتنا الإسلامية ، ورسالتنا الإنسانية ، وتفصيل لباس التربية والتعليم والمناهج الدراسية على قامتنا ، وإخضاع هذه المناهج لمبادئنا ورسالتنا التي أكرمنا الله بها ، وكلفنا إبلاغها إلى الانسانية كلها، في كل زمان ومكان(*)، ﴿ وَكَذَلِكَ جَعَلْنَاكُمْ أُمَّةً وَسَطاً لتكونُوا شُهَدَاءَ عَلَى النَّاسِ ﴾ (البقرة: ١٤٣).

« اللهم إني أسألك علما نافعا ، ورزقا طيبا ، وعملا متقبلا » . . ورحم الله امرءا أهدى إلينا عيوبنا ، وصلى الله على محمد وعلى آله وصحبه وسلم . . وآخر دعوانا أن الحمد لله رب العالمين .

(*) انظر كتاب التربية الإسلامية الحرة لأبي الحسن على الحسني الندوي .

محتويات الكتاب

الفصل الثالث : الشــفرات

تمهيد

مراجعة بعض قوانين نظرية الاحتمالات

تعتمد بعض مفاهيم نظرية المعلومات على الاحتمالات، وتُعتبر نظرية المعلومات أحد المجالات التطبيقية لنظرية الاحتمالات.

وفي هذا الفصل التمهيدي سنستعرض بإذن الله تعالى بعض القوانين الأساسية في نظرية الاحتمالات، والتي سنحتاج إليها في دراستنا لنظرية المعلومات في هذا الكتاب وخاصة في الفصلين الأول والثاني، وذلك مع بعض الأمثلة التوضيحية لهذه القوانين.

وقبل سرد هذه القوانين الأساسية للاحتمالات، نذكر أولاً بعض الاصطلاحات والتعريفات التي تلزمنا.

فيما يلي بعض الرموز والمعاني المقابلة لها:

تجربة لها نتيجة مرتقبة	:	E *(Experiment)*
مجموعة النتائج المحتملة للتجربة	:	S *(Sample Space)*
إحدى نتائج التجربة (حَدَث بسيط ـ عنصر من المجموعة S)	:	x_i *(elementary event of S)*
مجموعة جزئية من مجموعة النتائج S (حَدَث)	:	A *(event of S,) subset of S*

المجموعة الجزئية من S والمكملة للمجموعة الجزئية A	:	$\bar{A}$
عدد مرات تكرار التجربة	:	n
عدد مرات ظهور A	:	$n(A)$
احتمال حدوث x_i	:	$p(x_i)$
احتمال حدوث A	:	$p(A)$

وفيما يلي بعض التعريفات:

$$p(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(A)}{n} \left(\approx \frac{n(A)}{n}\right)$$

$$\Rightarrow 0 \leq p(A) \leq 1 \qquad (0 \leq n(A) \leq n)$$

$$p(A) = \sum_{x_i \in A} p(x_i)$$

$$S = \{x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n\}$$

$$P = \{p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n\} \ ; p_i \equiv p(x_i),$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \equiv p_1 + p_2 + \ldots. + p_n = 1 \ ;$$

$$(0 \leq p_i \leq 1, i = 1, 2, \ldots, n)$$

الاحتمال الشرطي (احتمال حدوث B إذا عُلم A): $p(B|A)$

يُقال إن الحدثين A,B مستقلان independent إذا كان:

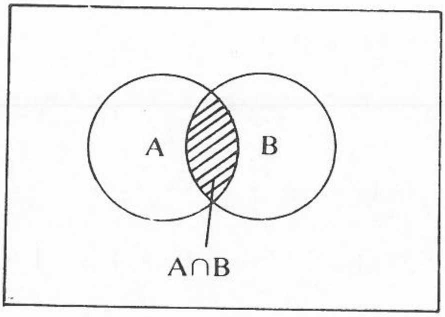
$$p(B|A) = p(B) \quad \& \quad p(A|B) = p(A)$$

وفيما يلي بعض القوانين:

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

$$p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$$

$$= p(A) + p(B) \ldots \begin{pmatrix} \text{إذا كان } A, B \\ \text{منفصلين disjoint} \end{pmatrix}$$



$$p(A\cap B) = p(A) \,.\, p(B|A)$$

$$= p(B) \,.\, p(A|B)$$

$$= p(A) \,.\, p(B) \,\ldots\ldots\ldots$$

(إذا كان A, B مستقلين independent)

$= 0$ (إذا كان A, B منفصلين disjoint)

والآن نـدرس بـإذن الله بعض الامثلة التي تـوضّـح مفـاهيم التعـريفـات السابقة واستخدام القوانين المذكورة.

مثـال ١ :

نفـرض أن عندنـا صندوقـاً به ست قـطع متماثلة، عليهـا الأرقـام ١ ، ٢ ، . . . ، ٦ (كل قطعة عليها رقم واحد من هذه الأرقام الستة).

ونفرض أن الرمز E يشير إلى تجـربة إخـراج قطعـة من الصندوق بـطريقة عشوائية،

وأن A تعني إخراج قطعة عليها رقم فردي،

وأن B تعني إخراج قطعة عليها رقم أقل من ٤ .

احسب كلاً من الاحتمالات التالية :

$p(A)$, $p(\bar{A})$, $p(B)$, $p(A \cap B)$, $p(A \cup B)$, $p(B|A)$, $p(A|B)$.

الحــل :

$$S = \{x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad x_5, \quad x_6\}$$
$$= \{1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6\}$$

$$P = \{p_1, \quad p_2, \quad p_3, \quad p_4, \quad p_5, \quad p_6\}$$
$$= \{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\}$$

A = { الارقام الفردية : odd numbers } = {1, 3, 5}

B = { الأرقام التي كل منها أقل من ٤ : numbers less than 4}

= {1, 2, 3}

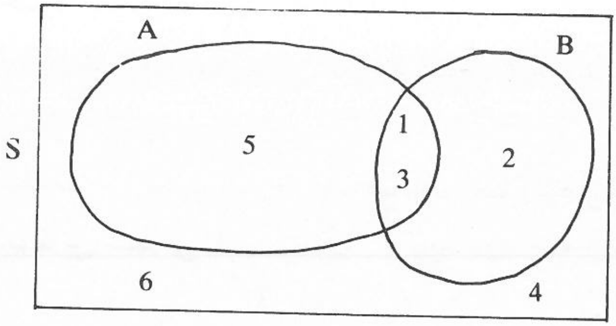
$$p(A) = \sum_{x_i \in A} p(x_i) = p(1) + p(3) + p(5)$$
$$p(x_i) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

(كما هو متوقع لأن عدد الأرقام الفردية = عدد الأرقام الزوجية)

$p(\bar{A}) \equiv p$ (العدد زوجي) $= 1 - p(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$$p(B) = p(1) + p(2) + p(3)$$
$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

(كما هو متوقع لأن عدد الأرقام التي كل منها أقل من ٤ يساوي عدد الأرقام التي كل منها أكبر من أو يساوي ٤)



$A \cap B = \{$ عدد فردي أقل من ٤ $\} = \{1, 3\}$

$$p(A \cap B) = p(1) + p(3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$A \cup B = \{$ عدد فردي أو أقل من ٤ $\} = \{1, 2, 3, 5\}$

$$p(A \cup B) = p(1) + p(2) + p(3) + p(5)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

حـــل آخـــر:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$p(B|A) = p$ (العدد أقل من ٤ إذا علم أنه فردي)

$$= \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

(ملاحظة : $p(B|A) \neq p(B)$ أي أن A, B ليسا مستقلين)

حـــل آخــــر:

المعلوم: أن العدد فردي، أي أنه أحد عنـاصر المجموعـة {1,3,5} المكونـة من ثلاثة عناصر.

المـطلوب: أن يكون أقـل من ٤، فهو إذن أحـد عناصر المجمـوعة {1, 3} المكونة من عنصرين.

$$\therefore \quad p(B|A) = \frac{2}{3}$$

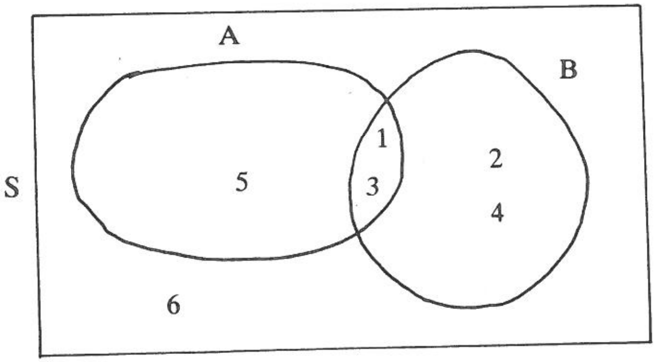
$p(A|B) = p$ (العدد فردي إذا علم أنه أقل من ٤)

$$= \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

مثـــال ٢:

أعد حل مثال ١ بعد تعديل B لتعنى إخـراج قطعـة عليها رقم أقـل من أو يساوي ٤.

الحـــل:



$A = \{ \text{رقم فردي} \} = \{1, 3, 5\}$
$B = \{ \text{رقم} \geqslant ٤ \} = \{1, 2, 3, 4\}$

$A \cap B = \{1, 3\}$
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$p(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$p(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$p(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$p(A \cup B) = \frac{5}{6}$$

$$p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} = p(B)$$

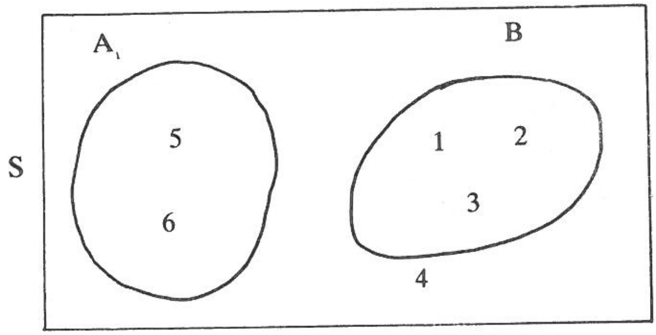
$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} = p(A)$$

نستنتج من هذه القيم أن A, B في هـذا المثال مستقـلان (independent) ولكنهما غير منفصلين (not disjoint)

مثـــال ٣ :

أعد حل مثال ١ بعد تعـديل A لتعنى إخـراج قطعـة عليها رقم أكـبر من أو يساوي ٥ .

الحـــل:



$$A = \{ x_i \mid x_i \geqslant 5\} = \{5, 6\}$$

$$B = \{x_i \mid x_i < 4\} = \{1, 2, 3\}$$

نلاحظ أن A, B منفصلان (disjoint)

$$A \cap B = \phi$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6\}$$

$$p(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A) = \frac{2}{3}$$

$$p(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$p(A \cap B) = 0$$

$$p(A \cup B) = \frac{5}{6}$$

لاحـــظ أن:

(لاحظ أن : $\left(p(A) + p(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} = p(A \cup B) \right)$

$$p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = 0$$

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = 0$$

كما هو متوقع لان A, B في هذا المثال منفصلان (disjoint) (ولكنهما غير مستقلين).

مثال ٤ :

صندوق به ١٠ قطع متماثلة ومُرقَّمة ١، ٢، ٣، ... ، ١٠. أُخرجت قطعة بطريقة عشوائية وعُلِم رقمها ثم أعيدت داخل الصندوق مع بقية القطع، ثم أخرجت قطعة وأعيدت، وهكذا . . . بحيث تكررت هذه التجربة خمس مرات.

(random sampling, i.e. sampling with replacement).

ما هو احتمال أن تكون القطع الخمس التي أُخرجت هي القطع التي تحمل الأرقام ١، ٢، ٣، ٤، ٥ على الترتيب؟

الحل :

احتمال إخراج القطعة رقم ١ أولاً $= \frac{١}{١٠}$ (من التماثل)

احتمال إخراج القطعة رقم ١ ثم القطعة رقم ٢ $= \frac{١}{١٠} \times \frac{١}{١٠} = \frac{١}{١٠٠}$

احتمال إخراج القطعة رقم ١ ثم القطعة رقم ٢ ثم القطعة رقم ٣ =

$$\frac{١}{١٠} \times \frac{١}{١٠} \times \frac{١}{١٠} = \frac{١}{١٠^{٣}}$$

. . . . . .

احتمال إخراج القطع الخمس ذوات الارقام ١ ، ٢ ، . . . ، ٥ على الترتيب

$$= \frac{١}{١٠^{٥}}$$

معنى هذه النتيجة أن المطلوب إجراء عملية إخراج خمس قطع متتالية من صندوق به عشر قطع مائة ألف مرة لكي نتوقع (ولكن ليس ضرورياً أن يحدث) خروج الخمس قطع ذوات الارقام ١ ، ٢ ، . . . ، ٥ على الترتيب.

مثال ٥ :

استخدم العلماء هذه الفكرة البسيطة المذكورة بعد نتيجة المثال السابق ـ مع بعض التعميم لها ـ في إثبات أن احتمال تواجد هذا الكون الذي نعيش فيه ـ بكل ما فيه من تنسيق وتنظيم ـ صدفة دون خالق إنما يساوي صفراً.

فقد حسبوا كم من الزمن استغرق تكوين بناء الكون على أساس القوانين الرياضية للصدف والاحتمالات.

وحسبوا كم من المادة نتطلب وجودها لتحدث فيها عمليات اتحاد العناصر بعضها ببعض (صدفة) لكي تتواجد الأشياء المختلفة العديدة الموجودة في هذا الكون والتي هي ذوات أعداد هائلة.

وفي السطور التالية نحاول تبسيط فكرة هذا الإثبات وحساباته.

الكون فيه كائنات حية وأجرام سماوية وكواكب والشمس والقمر والنجوم والجبال والشجر والأنهار والبحار والمحيطات. . فلنقصر حديثنا الآن على الأجسام الحية فقط.

الجسم الحي يتكـون من خـلايـا حيـة (مثـلاً: الجسم الإنسـاني بـه حـوالي ٢٦×١٠^{١٦} خلية) فلننظر إلى خلية واحدة فقط.

الخلية مركب صغير جداً ومعقد ويحتوي بدوره على عدة مركبـات، فلنتكلم عن مركب واحد فقط من هذه المركبات وهو البروتين.

الـبروتين مـركب كيميائي من خمسـة عناصر: الكـربـون ـ الهيـدروجـين ـ النتروجين ـ الأكسجين ـ الكبريت، ويشمل الجزيء البروتيني الواحد أربعين ألفـاً ٤٠,٠٠٠ من ذرات هذه العناصر، فما هو احتـمال اختيار هـذه العناصر الخمسـة من بين عناصر الكون المنتشرة في أرجائه والتي يزيـد عددهـا عن ١٠٠ عنصر؟ بل مـا هو احتـمال اختيار أعـداد خاصـة من ذرات كـل عنصر من العنـاصر الخمسـة (بحيث يكـون مجموعهـا هـو هـذه الأربعـون ألف ذرة) لكي يتكـون لنـا جـزيء بروتيني واحد بـالصدفـة والاتفاق المحض؟ وإلا لـو اختلفت نسب هذه العنـاصر بعضها إلى بعض لاختلاف أعـداد الذرات فقـد يتكون لـدينا سم قـاتل بـدل أن يتكون لدينا عنصر للحياة.

لـو افترضنـا أن هناك مـائة عنصر فقط في الكـون فإن احتـمال تجمـع خمس ذرات فقط واحدة من كل من العناصر الخمسة هو $\approx \frac{١}{١٠٠^{٥}} = \frac{١}{١٠^{١٠}}$ (واحـد في العشرة بلايين)

ويصغر هذا الرقم كثيراً جداً إذا أخذنا في الاعتبار الأعداد الخاصـة من كل عنصر ـ وليس ذرة واحـدة فقط ـ حتى تجمـع الأربعـين ألف ذرة (تتعقـد قـوانـين الاحتـمالات أكثر لهذه الحالات المركبة)، ومعنى هـذا أننا نحتـاج إلى إجراء عمليـة تجميع العناصر عدداً كبيراً من المرات لكي نتوقـع تكون (ولكن ليس ضروريـاً أن يتكون) هذا الجزيء البروتيني.

وقد حسب الرياضي السويسري (تشارلز يوجين جواي) هذا الاحتمال فوجد أنه حوالي ($\frac{1}{10^{160}}$)، وأن معنى هذا أن إمكان تواجد الجزيء البروتيني عن طريق الصدفة يتطلب مادة يزيد مقدارها بليون مرة عن المادة الموجودة الآن في سائر الكون حتى يمكن تحريكها وضخها لتتحد العناصر المطلوبة، وأن المدة التي يمكن فيها ظهور نتيجة ناجحة لهذه العملية تزيد عن 10^{243} سنة، بينما عمر الكون المقدَّر حالياً حوال 5×10^{12} سنة، وهي مدة قصيرة جداً لا تكفي لتواجد الجزيء البروتيني عن طريق الصدفة.

كل هذا من أجل تكون الجزيء البروتيني صدفة، هذا الجزيء الصغير الذي لا يمكن مشاهدته بأقوى منظار، وفي جسد الواحد منا أكثر من مئات البلايين من هذه الخلايا ($26 \times 10^{16} = 260 \times 10^{6} \times 10^{9}$ أي ٢٦٠ مليون بليون) التي تحتوي على هذه الجزيئات البروتينية.

النتيجة التي نصل إليها هي أن عُمر الكون الآن ومادته لا يكفيان لتكوّن جزيء بروتيني واحد صدفة، فاحتمال ذلك $\leftarrow$ صفر.

فإذا أخذنا كذلك الجزيئات البروتينية الأخرى في الخلية، ثم المركبات الأخرى غير البروتينية في الخلية، ثم كل الخلايا الحية في الكائن الواحد، ثم كل الكائنات الحية، ثم الكائنات الأخرى كذلك، والدقة المتناهية في نظام الكون كالمسافات بين الكواكب والأجرام السماوية وعدم اصطدامها رغم سرعاتها الهائلة، فإن احتمال وجود كل هذا صدفة $\leftarrow \frac{1}{\infty} \leftarrow$ صفر.

وكمثال تقريبي فإن القول بإمكان تواجد هذا الكون المنسق المنظم صدفة دون خالق حكيم خبير يشبه القول بأن ضغطاً عشوائياً على مفاتيح آلة كاتبة قد

أنتج صدفة معجماً ضخماً أو كتاب رياضيات، أو القول بأن ضغطاً عشوائياً على مفاتيح حاسب الكتروني قد أنتج برنامجاً طويلاً متكاملاً لحل المعادلات الجبرية أو المعادلات التفاضلية!!

مثال ٦:

يَستعمل نظام ثنائي لإرسال واستقبال المعلومات الرمزين 1 ,0 حيث يرسل الصفر (0) باحتمال P_0 ويرسل الواحد (1) باحتمال P_1 .

وبسبب أخطاء الإرسال فإن الصفر قد يتحول إلى واحد عند جهة الاستقبال باحتمال يساوي p_0 ، وكذلك قد يتحول الواحد إلى صفر باحتمال p_1 .

أوجد تعبيراً لكل مما يأتي:

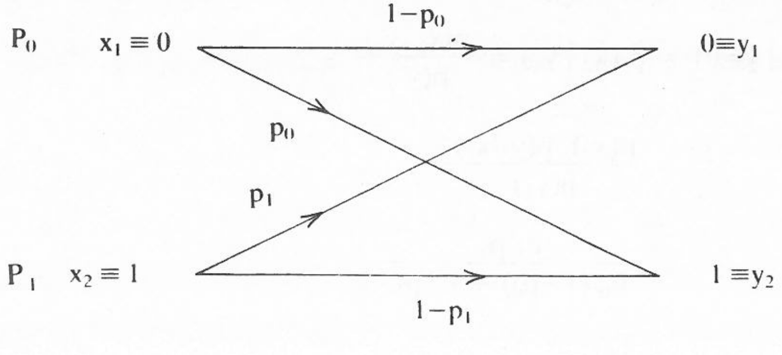
أ) العدد التقريبي للأخطاء في سلسلة (متتالية) من n رقم، حيث $n \gg 1$.

ب) احتمال أن يكون الرمز المستقبل صفراً.

حـ) احتمال أن يكون قد حدث خطأ إذا علم أن صفراً قد استُقبل.

الحـل:

يمكن تمثيل معلومات هذا المثال بالرسم المبين أو بالمصفوفة التالية، وسنعود إن شاء الله لفكرة تمثيل المعلومات بالرسم والمصفوفات بتفصيل أكثر في الفصول التالية:



$$Q = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 - p_0 & p_0 \\ p_1 & 1 - p_1 \end{pmatrix} \end{array}$$

أ) $P_0 + P_1 = 1$

في سلسلة من n رقم ثنائي ، يُتوقَّع أن يكون عـدد الاصفار مسـاوياً nP_0 ، وعدد الآحاد nP_1 أي $n(1 - P_0)$.

أي أن : عدد الاصفار المتوقع = $n P_0$

عدد الآحاد المتوقع = $n P_1 = n(1 - P_0)$

عدد الأخطاء المتوقع حدوثها في $n P_0$ صفراً = $nP_0 . p_0$

عدد الأخطاء المتوقع حدوثها في nP_1 واحداً = $nP_1 . p_1$

∴ عدد كل الأخطاء المتوقع حدوثها = $nP_0.p_0 + nP_1.p_1$

$= n(P_0 p_0 + P_1 p_1)$

ب) احتمال أن يكون الرمز المستقبل صفراً (أي $p(y_1)$) =

$P_0 . (1 - p_0) + P_1 . p_1$

حـ) احتمال إرسال واحد إذا علم أن صفراً قد استقبل :

$$p(x=1 \mid y=0) = p(x_2 \mid y_1) = \frac{p(x_2, y_1)}{p(y_1)} =$$

$$= \frac{p(x_2) . p(y_1|x_2)}{p(y_1)}$$

$$= \frac{P_1 . p_1}{P_0 (1-p_0) + P_1 . p_1}$$

الفصل الأول
المفاهيم الأساسية في نظرية المعلومات

* المعلومات الذاتية
* القيمة المتوسطة للمعلومات .
* مقاييس المعلومات المشتركة والشرطية .
* المعلومات المتبادلة .
* خواص مقاييس المعلومات .
* معانيها وبعض تطبيقاتها .

الفصل الأول

المفاهيم الأساسية في نظرية المعلومات: مقاييس المعلومات

Basic Concepts of Information Theory: Information Measures (Entropies)

تمهيـــد :

من النعم الجليلة التي أنعم الله سبحانه وتعالى بها على الانسان نعمة البيان «خَلَقَ الإِنْسانَ . عَلَّمَهُ البيان» (الرحمن: ٣، ٤) فيستطيع الإنســان أن يُبين ويعبر عن مختلف الأفكار والمعلومات والبيانات، أي أن الإنسان يُعَدُّ مصدراً للمعلومات (information source) ، ويستطيع كذلك أن ينقل المعلومات بعد إدراكها وفهمها واستيعابها، وذلك كله بوسائل مختلفة أي أنه ناقل وموصل للمعلومات (communicator of information) . ولتحسين سبل ووسائل الاتصالات عامة نحتاج إلى قياس المعلومات ككمية فيزيائية مثل الكتلة أو الطاقة.

ويمكن أن يُعد مقياس المعلومات مقياساً لوقت أو تكاليف إرسال المعلومات.

وللوصول إلى هذا المقياس الرياضي للمعلومات تتبع كتب نظرية المعلومات عادة أحد سبيلين:

أ) **الأول** : أن تبدأ بتعريف القانون الرياضي لمقياس المعلومات، ثم تثبت أن هذا القانون يحقق الخواص الطبيعية المختلفة التي ننتظر من مقياس المعلومات أن يحققها.

ب) **الثاني**: أن تبدأ بدراسة الخواص الطبيعية المختلفة التي ننتظر من مقياس المعلومات أن يحققها، ثم من هذه الخواص ـ بعد صياغتها في صورة علاقات رياضية ـ تستنتج القانون الرياضي لمقياس المعلومات.

أما السبيل الاول فإنه غير مقنع تماماً للطالب أو لدارس نظرية المعلومات، إذ أنه من الطبيعي أن يتبادر إلى ذهنه السؤال: من أين جيء بهذا القانون، وعلى أي أساس وُضع؟

وأما السبيل الثاني فإنه مقبول ومقنع تماماً بيد أنه يحتاج إلى براهين رياضية طويلة، وإثباتات تتطلب معرفة غير بسيطة ببعض العلاقات الرياضية البحتة وخاصة في نظرية القياس.

والسبيل الذي سنسلكه هنا بإذن الله تعالى يعتمد على ذكر بعض الخواص الطبيعية التي ينتظر من مقياس المعلومات المطلوب إيجاده أن يحققها، ثم من هذه المجموعة المذكورة من الخواص نستنتج بصورة رياضية مبسطة ـ ودون الدخول في التفصيلات ـ القانون المطلوب لمقياس المعلومات، ثم نثبت أن هذا القانون يحقق مجموعة أخرى من الخواص الطبيعية التي يجب أن يحققها أي مقياس للمعلومات. أي أن هذا الأسلوب الذي سنتبعه مزيج من الأسلوبين المذكورين سابقاً.

المعلومات الذاتية (Self Information)

أولاً: نفرض أن المطلوب اختيار منتوجة من المنتوجات الموجودة في دليل إحدى الشركات التجارية، والذي يحتوي على عدد n من المنتوجات المختلفة والتي نرمز لها بالرموز:

$$x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$$

ونفرض أن احتمالات اختيار هذه المنتوجات على الترتيب هي:

$$p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n$$

وأن كمية المعلومات التي نحصل عليها بمعرفة العنصر المختار x_i هي $I(x_i)$. هذه الكمية يجب أن تكون دالة في احتمال اختيار هذا العنصر x_i، أي أن

$$I(x_i) = f\left(p(x_i)\right) \equiv f(p_i)$$

وإذا فرضنا الآن للسهولة أن احتمالات اختيار العناصر جميعها متساوية أي أن:

$$p_i = \frac{1}{n}$$

فإن قيمة المعلومات التي نحصل عليها بمعرفة العنصر الذي تم اختياره تصبح

$$I_1(x_i) = f\left(\frac{1}{n}\right)$$

ثانياً: نفرض الآن أن كل منتوجة من هذه المنتوجات يمكن أن تختار بحيث تكون ذات لون معين من بين عدد m من الألوان (أو بحيث تكون من منتوجات مصنع معين من بين عدد m من المصانع):

$$y_1, y_2, \ldots\ldots, y_m$$

ونفرض أيضاً للسهولة أن احتمالات اختيار اللون متساوية. فتكون كمية المعلومات التي نحصل عليها بمعرفة اللون y_j الذي تم اختياره هي:

$$I_2(y_j) = f\big(p(y_j)\big) = f(\frac{1}{m})$$

حيث الدالة f يجب أن تكون هي نفس الدالة السابقة (الغير معروفة والتي نحاول إيجادها).

ثالثاً: وأخيراً نفرض أن الاختيار سيتم بطريقتين:

أ. في الطريقة الاولى: نختار المنتوجة أولاً ثم نختار اللون، بحيث أن الاختيارين مستقلان عن بعضيهما البعض.

ب. في الطريقة الثانية: نختار المنتوجة واللون في آن واحد، كاختيار واحد من بين عدد من الاختيارات المتساوية الاحتمالات يساوي mn.

من الخصائص التي نطلب من مقياس المعلومات I أن يحققها أن تتساوى كمية المعلومات التي نحصل عليها باتباع كل من الطريقتين، أي أن قيمة المعلومات التي نحصل عليها باختيار المنتوجة واللون في آن واحد يجب أن تساوي قيمة المعلومات التي نحصل عليها باختيار المنتوجة مضافاً إليها قيمة المعلومات التي نحصل عليها باختيار اللون، علماً بأن الاختيارين الأخيرين مستقلان كما سبق ذكره.

تسمى هذه الخاصية: خاصية الإضافية (additivity).

وهكذا نحصل على العلاقة التالية:

$$I(x_i, y_j) = I_1(x_i) + I_2(y_j)$$

حيث $I(x_i, y_j)$ هي قيمة المعلومات التي نحصل عليها باختيار x_i, y_j معاً في آن واحد.

وبالتعويض عن قيمة المعلومات I بدلالة الدالة f التي نبحث عنها، نحصل على:

$$f\left(p(x_i, y_j)\right) = f\left(p(x_i)\right) + f\left(p(y_j)\right)$$

وبفرض التماثل وتساوي الاحتمالات فإن

$$p(x_i, y_j) = \frac{1}{nm}$$

وبذلك نحصل على العلاقة:

$$f(\frac{1}{nm}) = f(\frac{1}{n}) + f\frac{1}{(m}) $$

هذه معادلة دالية (functional equation) لها عدة حلول.

ونظراً لأننا ننتظر من مقياس المعلومات أن يكون دالة متصلة (continuous function) لأنه إذا حدث تغير طفيف في الاحتمال وجب أن يحدث تغير طفيف في كمية المعلومات المقابلة، لذلك فإن الحل الذي نقبله لهذه المعادلة يجب أن يكون دالة متصلة، وهذا الحل الذي يناسب مسألتنا هو:

$$f(x) = c \log x$$

حيث c ثابت اختياري، واللوغاريتم لأي أساس.

فإذا أضفنا إلى مجموعة الخواص الطبيعية التي يُنتظر من مقياس المعلومات أن يحققها خاصية أن كمية المعلومات يجب أن تكون غير سالبة (non negative) وذلك لأنه بعد إجراء تجربة ما أو بعد معرفة حدثٍ ما فإن معلوماتنا إما أن تزيد

وأما أن تبقى كما هي دون تغير (في حالة ما إذا كانت نتيجة التجربة معروفة قبل إجراء التجربة أو قبل معاينة نتيجتها، أو إذا كان الحدث متيقن الحدوث)، ولكن معلوماتنا لا تنقص، فإن الثابت c في الحل الذي حصلنا عليه يجب أن يكون سالباً (لاحظ أن x تمثل احتمالاً أي أن $x \leqslant 1$ وبالتالي فإن $\log x$ كمية غير موجبة).

فإذا أضفنا كذلك الخاصية التي تسمى بالخاصية السوية (normalization) وهي مجرد اتفاق أو اصطلاح على أن وحدة المعلومات (unit of information) هي كمية المعلومات التي نحصل عليها بمعرفة العنصر المختار من بين عنصرين متساويي الاحتمالين، أي أن احتمال حدوث كل منهما يساوي $\frac{١}{٢}$ ، فإن الحل f يصبح :

$$f(x) = -\log_2 x$$

حيث اللوغاريتم هنا للأساس ٢ .

(لاحظ أن : $f(\frac{1}{2}) = -\log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2 = 1$)

ووحدة المعلومات في هذه الحالة تعرف باسم (bit) الوحدة الثنائية للمعلومات (binary unit of information) .

وإذا اعتبرنا اللوغاريتم للأساس ١٠ فإن وحدة المعلومات في هذه الحالة تقابل اختيار واحد من عشرة عناصر متساوية الاحتمالات، وتسمى وحدة المعلومات عندئذ (hartley).

أما إذا أُخذ الاساس الطبيعي كأساس للوغاريتم، فإن وحدة المعلومات تسمى nat (اختصاراً لكلمة natural).

وفي مسائل الاتصالات يفضل أن نستخدم دائماً الأساس الثنائي .

* * *

نفرض الآن أن عندنا مصدراً للمعلومات به عدد محدود من الـرموز (sym- bols) أو الرسائل (messages) التي نعبِّر عنها وعن احتمالات إرسالها كما يلي:

$$\begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots\cdots & x_i & \cdots\cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots\cdots & p_i & \cdots\cdots & p_n \end{pmatrix}$$

حيث p_i هو احتمال اختيار العنصر x_i.

ونفرض أن الاختيارات المتتابعة (successive selections) مستقلة إحصائياً عن بعضها البعض. **مثل هذا المصدر يطلق عليه مصدر مستقل (independent source).**

تعريف: قيمة المعلومات الذاتية (amount of self information)

تُعرَّف قيمة المعلومات الذاتية للرسالة x_i بأنها كمية المعلومات المرتبطة بحدوث هذه الرسالة، أي كمية المعلومات التي نحصل عليها بمعرفة حدوث هذه الرسالة، وتُعطَى بالعلاقة:

$$I_i \equiv I(x_i) = -\log p_i \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

أو بأسلوب آخر: إذا فرضنا أن S فـراغ احتمالات (probability space) محـدود (finite ـ أي بـه عـدد محـدود من العنـاصر $x_1, x_2, \ldots, x_n$) وكـامـل (complete ـ أي أن مجموع احتمالات هذه العناصر يساوي 1

$$(\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

فإن المعلومات الذاتية لحدث ما (outcome, event) x_i احتـماله p_i تُعـرَّف بالعلاقة:

$$I(x_i) = -\log p_i \;,\; p_i \equiv p(x_i)$$

ملاحظـــة : من خواص اللوغاريتمات :

$$\log_a y = \log_b y \cdot \log_a b$$

$$\Rightarrow \quad \log_2 p_i = \frac{\ln p_i}{\ln 2}$$

القيمـة المتوسـطة للمعلومـات : [Average amount of information: Entropy H(X)]

القيمة المتوسـطة للمعلومات للرسـالة الـواحدة من رسـائل المصـدر (للرمز الـواحد من رمـوزه) هي المتوسط الاحصـائي (statistical average) للمعلومات الذاتية، وتعطى بالعلاقة :

$$H(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i I_i = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$$

ملاحظات :

- المتوسط الإحصائي $\bar{f}$ (statistical average or mean, expectation) لـدالة f تأخذ القيم f_i المـرتبطة بـالأحداث (events) x_i في فـراغ الاحتمالات S، حيث احتمالات هذه الأحداث هي p_i، يُعطى بالقانون :

$$\bar{f} = \sum_{i=1}^{n} p_i f_i$$

- نظراً لأن H دالة في الاحتمالات $p_1, p_2, \ldots, p_n$ والتي عددهـا n فأحيـاناً تكتب H في الصورة $H_n(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ وبذلك فإن قانون القيمة المتوسـطة للمعلومات يمكن أن يكتب بالصورة التالية :

$$H_n(p_1, p_2, \ldots, p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$$

ـ مصادر المعلومات التي تدخل في نطاق دراسة هذا المنهج كلها من النوع المتقطِّع (discrete)، ومجموعات الرسائل كلها مجموعات محدودة أو منتهية (finite) والتي نرمز لإحداها مثلاً بالرمز X حيث:

$$X = \{x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n\}$$

وعموماً فإن المصدر يرسل عشوائياً (at random) أي رسالة من هذه المجموعة المعرَّفة من رسائله، فنحن لا نعرف بالضبط أي رسالة سيقوم المصدر بإرسالها في المرة التالية ولكننا نعرف احتمال إرسال كل رسالة (p_i هو احتمال إرسال الرسالة x_i). وبالتالي فنحن عموماً لا نعرف على وجه التأكيد بصورة تفصيلية عمل المصدر في إرسال رسائله المتتالية، ولكن يمكننا وصف هذا العمل بصورة إجمالية أو في المتوسط (overall or average performance).

القيمة المتوسطة للمعلومات H تُعَدُّ قياساً نسبياً (في المتوسط) لمدى عدم التأكد (uncertainty) بالنسبة لحدوث أو إرسال كل رسالة على وجه الخصوص من مجموعة رسائل المصدر.

ولذلك فإنه يطلق على H عدة أسماء منها:

القيمة المتوسطة للمعلومات (التي نتوقع الحصول عليها بعد إجراء التجربة)

القيمة المتوسطة لعدم التأكد (قبل إجراء التجربة)

انتروبيا الاتصالات.

وأحياناً تحذف ـ للاختصار والسهولة ـ كلمة «المتوسطة» فيقال: قيمة المعلومات أو مقياس المعلومات، ومقياس عدم التأكد، ويُفهم أننا نعني القيم المتوسطة.

(entropy ≡ communication entropy,
measure of information,
measure of uncertainty,
measure of ignorance,
measure of surprise.)

- القيمة المتوسطة للمعلومات، أو مقياس عدم التأكد H يمثل القيمة المتوسطة أو القيمة المتوقعة (expected value) لعدم التأكد بالنسبة لفراغ الاحتمالات كله (probability scheme) ، بينما قيمة المعلومات الذاتية I_i تمثل قياس عدم التأكد بالنسبة لحدث معين (أو رسالة معينة) x_i .

خواص طبيعية أخرى لمقاييس المعلومات

بدأنا بإيجاد مقياس للمعلومات الذاتية (وبالتالي مقياس للقيمة المتوسطة للمعلومات) بناءاً على بعض الخواص الطبيعية التي يجب أن يحققها مقياس المعلومات، وهذه المجموعة من الخواص التي اعتمدنا عليها في خطوات إيجاد المقياس هي : خاصية الإضافية، وخاصية الاتصال، وخاصية أن كمية المعلومات غير سالبة، والخاصية السوية.

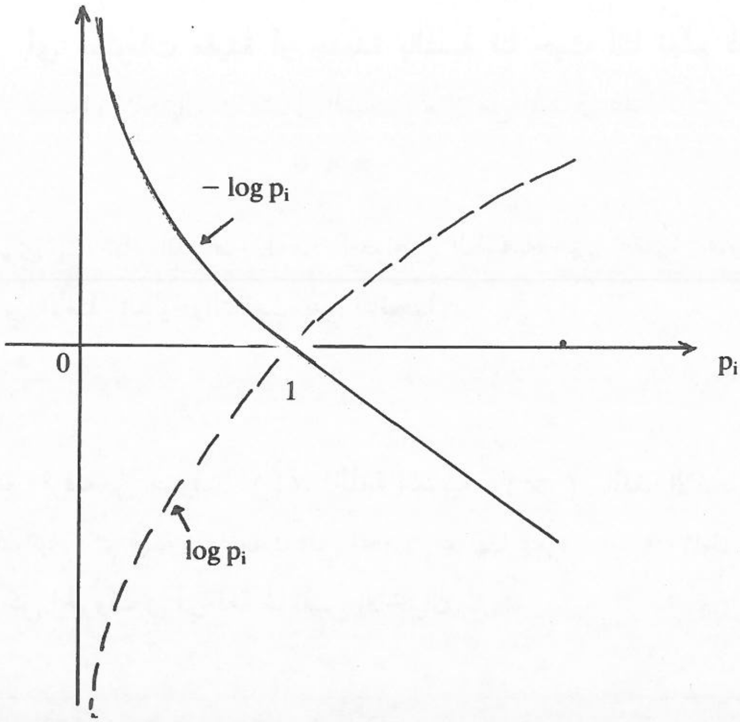
وفيما يلي (ثم في الأمثلة التالية) سنرى بإذن الله تعالى مجموعة أخرى من الخواص الطبيعية المفيدة التي يحققها المقياسان I وH اللذان حصلنا عليهما.

- بالنسبة لمقياس المعلومات الذاتية

$$I_i \equiv I(x_i) = -\log p_i , \qquad 0 \leqslant p_i \leqslant 1$$

نلاحظ ما يلي :

أولاً : كلما زاد الاحتمال نقصت قيمة المعلومات وهذا طبيعي وذلك لأنه إذا كان احتمال حدوث حدث معين كبيراً أو كان احتمال إرسال رسالة



معينة كبيراً، فإننا بعد معرفة حدوث هذا الحدث المعين أو بعد معرفة إرسال هذه الرسالة المعينة لا نكون قد حصلنا على قدر كبير من المعلومات وذلك لأن هذا الامر كان متوقعاً من قبل وبدرجة كبيرة، بينما إذا كان الاحتمال صغيراً ثم وقع هذا الأمر غير المنتظر أو الذي كان احتمال حدوثه ضعيفاً فإننا نحصل على قدر كبير من المعلومات، حيث أننا قد فوجئنا بهذا الخبر الذي لم نكن نتوقعه (ولذلك فإن مقاييس المعلومات تسمى أحياناً مقاييس المفاجأة).

ثانياً : حينما يصل الاحتمال إلى القيمة ١ فإن قيمة المعلومات تساوي صفراً ($\log 1 = 0$)، وهذا منتظر من الناحية الطبيعية لأنه إذا كان احتمال حدوث حدث ما يساوي ١ فإن هذا يعني أنه أكيد الحدوث بإذن الله (certain event)، فإذا علمنا بحدوثه فإننا لا نكون قد حصلنا على

أي معلومات مفيدة أو جديدة بالنسبة لنا حيث أننا نعلم ذلك مسبقاً، كاحتمال أن تشرق الشمس مثلاً من المشرق غداً.

* * *

وسنرى إن شاء الله مزيداً من الخواص الطبيعية التي تحققها مقاييس المعلومات في الأمثلة التالية والتعقيب على نتائجها.

مثال ١ ـ ١:

اختير حرف من حروف (أ) اللغة العربية (ب) اللغة الانجليزية اختياراً عشوائياً. كم قيمة المعلومات التي نحصل عليها بمعرفة الحرف المختار، بفرض أن كل الحروف في أي لغة لها نفس الاحتمال.

الحـــل:

في حالة وجود عدد n من العناصر المتساوية الاحتمالات (كل احتمال يساوي $\frac{1}{n}$) فإن قيمة المعلومات الذاتية لأي عنصر (أي حدث أو أي رسالة أو أي حرف) أو قيمة المعلومات التي نحصل عليها بمعرفة العنصر المختار تساوي

$$I = -\log\frac{1}{n} = \log n$$

أ) في اللغة العربية: ٢٨ حرفاً مختلفاً

$$I_a = \log_2 28 = 4.8073547 \cong 4.8 \quad \text{bits}$$

ب) في اللغة الإنجليزية: ٢٦ حرفاً مختلفاً

$$I_e = \log_2 26 = 4.7004394 \cong 4.7 \quad \text{bits}$$

أي أن قيمة المعلومات الذاتية لحرف من حروف اللغة العربية أكبر من القيمة المناظرة لحرف من حروف اللغة الإنجليزية.

مثـال ١ ـ ٢ :

اختـير عـدد ثنـائي (binary number) مُكـوَّن من m رقم (m digits) اختياراً عشوائياً (مثلاً العدد الثنائي 101 يتكون من ثلاثة أرقام) .

كم قيمة المعلومات بالوحدات الثنائية (bits) ـ أو كم عدد الوحدات الثنائية للمعلومات ـ اللازمة لمعرفة هذا العدد الثنائي؟

الحـل :

كل موضـع رقم في العدد الثنـائي يمكن أن يُختار لـه أحد رقمـين (مثلاً 0 أو 1) . وبالتالي فإن عدد الاعداد الثنائية المختلفة الممكن تكوينها والتي يتكون كل منها من m رقم هو 2^m.

(مثلاً إذا كانت m=3 فإن هناك ٨ أعداد ثنائية مختلفة هي :
000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111)

ونـظراً لأن كل هـذه الأعداد الممكنـة متسـاويـة الاحتمـالات ، فـإن قيمـة المعلومات المطلوبة هي :

$$I = \log n = \log 2^m = m \ \text{bits}$$

حـل آخـر :

كل رقم يحتوي على وحدة ثنائية واحدة (1 bit) من المعلومات ($\log 2=1$) .
ونـظراً لان أرقـام العـدد الثنـائي ـ والتي عـددهـا m ـ تختـار مستقلة عن بعضهـا البعض ، فإن القيمة الكلية للمعلومات تساوي :

$$\underbrace{1 + 1 + \dots\dots\dots + 1}_{\text{عدد } m \text{ من المرات}} = m$$

مثال ١ ـ ٣:

كم قيمة المعلومات التي يعطيها عدد عشري مكون من M رقم؟

(مثلاً العدد العشري ٣٥٨٤٢ مكوَّن من خمسة أرقام)

الحـــل:

كل رقم في العدد العشري يمكن أن يأخذ واحداً من عشر قيم مختلفة:

٠ ، ١ ، ٢ ، ... ، ٩

وبالتالي فإن عدد الأعداد العشرية المختلفة الممكنة والتي يتكون كل منها من M رقم هو 10^M .

ونظراً لأن كل هذه الأعداد متساوية الاحتمالات فإن قيمة المعلومات المطلوبة هي:

$$\begin{aligned} I = \log n = \log 10^M &= M \log_2 10 && \text{bits} \\ &= 3.3219283\,M && \text{bits} \\ &\cong 3.32\,M && \text{bits} \end{aligned}$$

حـــل آخـــر:

كل رقم يحتوي على قدر من المعلومات يساوي $\log_2 10$ وحـدة ثنائيـة (bits) ونظراً لأن أرقام العدد العشري ـ وعـددها M ـ تختـار مستقلة عن بعضها البعض فتكون القيمة الكلية للمعلومات مساوية مجموع كميات المعلومـات (الجزئيـة) أي مساوية $M. \log_2 10$ كما سبق.

حـــل ثالث:

القيمة الكلية للمعلومات في العدد العشري =

(عدد الارقام العشرية في العدد) × (متوسط قيمة المعلومات/رقم واحد)

$$
\begin{aligned}
\lozenge\ I_{total} &= M \times H(X) \\
&= M \times -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i\,; \qquad n = 10, \qquad p_i = \frac{1}{10} \\
&= M \times \log_2 10 \cong 3.32\ M \qquad \text{bits}
\end{aligned}
$$

وهي نفس النتيجة السابقة.

فمثلاً العدد العشري ٣٥٨٤٢ المكون من خمسة أرقام يحتوي على عـدد من وحدات المعلومات يساوي

$$\cong 5 \times 3.32 = 16.60 \qquad \text{bits}$$

ملاحظـة: في متسلسلة (sequence) طـويلة تتكون من عـدد كبير جـداً M من رموز مختلفة

$$x_1\ x_2\ \ldots\ldots\ x_M$$

يكون العدد المتوقع N_i (expected number) من رمـز واحد معين x_i (أي عدد مرات حدوثه أو تواجده) هو

$$N_i = M \times p_i$$

حيث p_i هو احتمال حدوث x_i.

وبما أن قيمة المعلومات الذاتيـة أو كمية المعلومـات المحتواة في الرمز x_i هي $-\log p_i$

فإن كمية المعلومات المحتواة في رسالة تتكـون من عدد N_i من الرمز x_i تساوي

$$N_i \times -\log p_i = -N_i \log p_i$$

وبالتالي فإن كمية المعلومات الكلية في الرسالة أو العدد الـذي يتكون من M رمز هي :

$$\sum_{i=1}^{n} - N_i \log p_i = \sum_{i=1}^{n} - M\, p_i \log p_i = M \times - \sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$$

وهي العلاقة التي استخدمناها سابقاً في الحل الثالث.

مثـــال ١ ـ ٤ :

أوجد القيمة المتوسطة للمعلومات للرمز الواحد في رسالة طويلة مكونـة من M رمز، حيث احتمالات الرموز هي كما يلي :

الرمز :	E	D	C	B	A
احتماله :	0.05	0.1	0.1	0.25	0.5

الحـــل :

القيمة المتوسطـــة للمعلومـــات هي :

$$\begin{aligned} H &= - \sum_{i=1}^{5} p_i \log p_i \quad \text{bits/symbol} \\ &= - 0.5 \log 0.5 - 0.25 \log 0.25 - 0.1 \log 0.1 \\ &\qquad - 0.1 \log 0.1 - 0.05 \log 0.05 \\ &= 1.88 \text{ bits/symbol} \end{aligned}$$

ملاحظة : كمثال يوضح معنى بيانات هذا المثال وحله، نفرض أن هـذه الرسـالة الـطويلة تتكون من عشرين رمزاً، وبنـاءاً على الاحتمـالات المذكـورة نتوقع أن تكون نصف الرسالة (أي ١٠ رموز) Aورُبعها (أي ٥ رموز) B، وعشرها (أي رمزان) C وكذلك عشرها (أي رمزان) D، بينما لا

تشتمل إلا على رمز واحد فقط E (وهو ما يقابل ٥٪ من طول الرسالة)، فقد تظهر الرسالة مثلاً بالصورة التالية:

A D B A A E B A C B A A A C A B D A A B

ويحمل الرمز الواحد ـ في المتوسط ـ قدراً من المعلومات يساوي ١,٨٨ وحدة، وتحمل الرسالة كلها المكونة من M رمز قدراً من المعلومات يساوي:

$$1.88\ M\ \text{bits}$$

فمثلاً الرسالة المذكورة سابقاً كمثال توضيحي والتي تتكون من عشرين رمزاً تعطى قدراً من المعلومات يساوي:

١,٨٨ × ٢٠ = ٣٧,٦٠ وحدة معلومات

مثال ١ ـ ٥:

قارن بين القيم المتوسطة للمعلومات (entropies H) للمجموعات الثلاث (أو للمصادر الثنائية الثلاث) التالية:

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{1}{256} & \frac{255}{256} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ \frac{7}{16} & \frac{9}{16} \end{pmatrix}$$

I II III

القيم المتوسطة للمعلومات لهذه المجموعات الثلاث هي:

$$H_1 = -\frac{1}{256}\log\frac{1}{256} - \frac{255}{256}\log\frac{255}{256} = 0.0369 \quad \text{bits/symbol}$$

$$H_{II} = -\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} = 1 \quad \text{bit/symbol}$$

$$H_{III} = -\frac{7}{16}\log\frac{7}{16} - \frac{9}{16}\log\frac{9}{16} = 0.989 \quad \text{bits/symbol}$$

في المجموعة I من السهل نسبياً توقع (أو تخمين) أي الحدثين A_1, A_2 سيحدث نظراً لأن احتمال A_2 قريب من الواحد (أي قريب من ١٠٠٪) بينما احتمال A_1 قريب من الصفر، أي أن A_2 شبه أكيد الحدوث وفي المجموعة III يكون هذا التوقع أصعب نظراً لأن احتمالي الحدثين (C_1, C_2) قريبان من بعضيهما البعض، بينما في المجموعة II يكون هذا التوقع أو الحَزْر أشد صعوبة لتساوي احتمالي الحدثين (B_1, B_2)، فلا نستطيع أن نتنبأ أي الحدثين سيحدث.

ولذلك فمن الطبيعي ومن المقبول منطقياً أن يكون قدر عدم التأكد (uncertainty) من حدوث الحدث التالي في حالة المجموعة الثانية أكبر من القدر المقابل في حالة المجموعة الثالثة، وهذا بدوره أكبر من القدر المقابل في حالة المجموعة الأولى.

هذا الاستنتاج المنطقي يتفق مع النتائج التي حصلنا عليها بتطبيق قانون القيمة المتوسطة للمعلومات H حيث أن:

$$H_I < H_{III} < H_{II}$$

مثـــال ١ ـ ٦:

في نظام من نظم الاتصالات ترسل ثلاثة رموز A, B, C بالاحتمالات:

أ) المتساوية $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$

ب) غير المتساوية $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٤}$

احسب القيمة المتوسطة للمعلومات للرمز الواحد في كل من الحالتين، وقارن بين القيمتين.

الحل:

أ) في حالة تساوي الاحتمالات الثلاثة:

$$H = \log 3 = 1.5849$$

ب) في حالة الاحتمالات غير المتساوية:

$$H = -\frac{1}{4}\log\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\log\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\log\frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.5 < 1.5849$$

أي أن القيمة المتوسطة للمعلومات تكون أكبر في حالة الاحتمالات المتساوية وهي نفس النتيجة التي وصلنا إليها أيضاً في المثال السابق حيث مجموعة العناصر تتكون من عنصرين فقط، وسنثبت إن شاء الله ـ فيما بعد ـ هذه النتيجة بصورة عامة لأي عدد من العناصر، وهي أن القيمة المتوسطة للمعلومات تبلغ نهايتها العظمى (أي تكون أكبر ما يمكن) عندما تكون العناصر كلها متساوية الاحتمالات (equiprobable). وهي الخاصية التي تعرف باسم خاصية النهاية العظمى (maximality).

مثال ١ ـ ٧:

ارسم منحنى القيمة المتوسطة للمعلومات لمصدر معلومات ثنائي (binary information source) يرسل الرمزين 0, 1 بالاحتمالين p, 1−p ، على الترتيب، وذلك لقيم مختلفة للاحتمال p .

الحـــل:

القيمة المتوسطة لمعلومات هذا المصدر الثنائي تعطى بالعلاقة:

$$H(p) \equiv H_2(p, 1-p)$$
$$= -p \log p - (1-p) \log (1-p) \quad ; \quad 0 \leq p \leq 1$$

هذه الدالة تصل إلى قيمتها العظمى والتي تساوي ١ عندما $p = \frac{1}{2}$.

$$H\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

وهي دالة متماثلة حول $p = \frac{1}{2}$ حيث أن:

$$H(p) = H(1-p) = -p \log p - (1-p) \log (1-p)$$

وعنـد كل من الـطرفين (أي عنـدما p=0 أو p=1) فـإن القيمة المتـوسطة للمعلومات يجب أن تساوي صفراً وذلك لأن أحد الرمزين احتمال إرساله يسـاوي ١ أي أنه من المؤكد أن هذا الرمز سيرسل. وبالتالي فليس لدينا أي قدر من الشك أو عدم التأكـد (uncertainty) بخصوص العنصر الـذي سيرسـل، أو ـ بأسلوب آخر ـ فإننا بعد أن نعلم أن هذا الرمز ـ الذي كان احتمال إرسـاله يسـاوي ١ ـ قد أرسل، لا نحصل على أي قدر من المعلومات.

وللوصول ـ رياضياً ـ إلى هذه النتيجة:

$$H(0) = H(1) = -1 \log 1 - 0 \log 0$$
$$= -0 \log 0$$

ويمكن أن نضع $0 \text{ Log}_2 0 := 0$ كتعريف، أو أن نحسب نهاية المقدار $p \log p$ عندما تؤول p إلى الصفر:

$$\lim_{p\to 0} p \log p = \frac{1}{\ln 2} \lim_{p\to 0} p \ln p$$

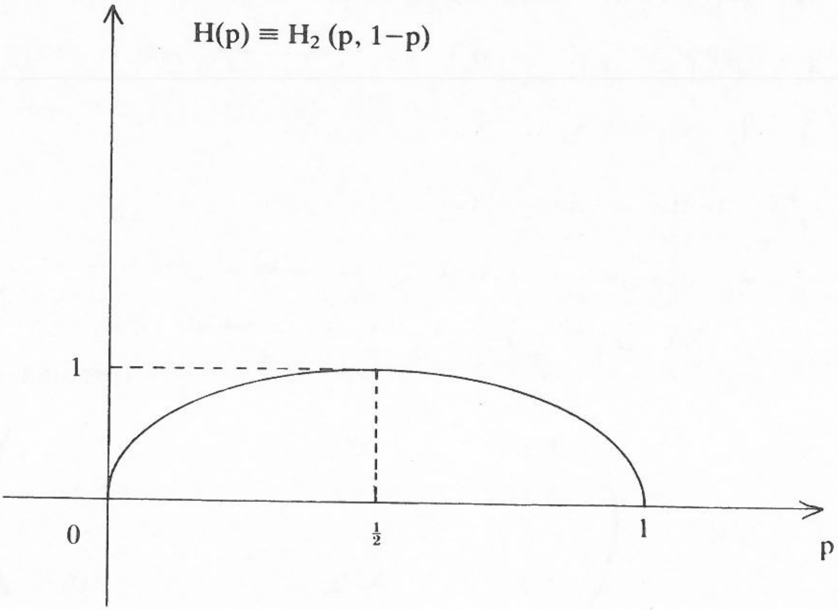
$$= \frac{1}{\ln 2} \lim_{p\to 0} \frac{\ln p}{1/p}$$

$$= \frac{1}{\ln 2} \lim_{p\to 0} \frac{1/p}{-1/p^2}$$

$$= \frac{1}{\ln 2} \lim_{p\to 0} (-p) = 0$$

وهي النتيجة المتوقعة.

ويكون شكل منحنى الدالة كما يلي:



مقاييس المعلومات المشتركة والشرطية
(Joint and Conditional Entropies)

[مقـاييس المعلومات للفـراغـات أو النـظم الاحتـمالية المتقـطعـة والمنتهيـة ذوات البعدين]

[Measures of Information for 2-dimensional discrete finite probability schemes]

نفـرض أن كلاً من X, Y فـراغ متقطع مُنْتَـهٍ (أي محـدود)، وأن مجمـوعتي الاحتمالات المتقابلتين هما على الترتيب P, Q حيث:

$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n\}$

$P = \{p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots, p_n\}$

$Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_j, \ldots, y_m\}$

$Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_j, \ldots, q_m\}$.

أي حـدث x_i يمكن أن يحدث مـع أي حدث y_j، وبـالتالي فـإن الأحداث التـالية تُكَـوِّن مجموعـة متكاملة من الأحـداث في الفـراغ الضـربي XY (product space)

$$XY = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_m \\ x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_m \\ \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & x_ny_m \end{pmatrix}$$

وتكـون مصفـوفـة الاحتـمالات المشـتركـة (المتكـاملة) [(complete) joint probability matrix] هي :

$$\Pi = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{1m} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{2m} \\ \vdots & & \vdots \\ \pi_{n1} & \pi_{n2} & \pi_{nm} \end{pmatrix}$$

حيـث :

$$\pi_{ij} = p(x_i, y_j) \equiv P(X = x_i, Y = y_j)$$

$$= p(x_i) \cdot p(y_j|x_i) \equiv p_i \cdot q_{ij} ;$$

$$\left(p_i \equiv p(x_i), q_{ij} \equiv p\,(y_j|x_i)\right)$$

$$= p(y_j) \cdot p(x_i|y_j) \equiv q_j \cdot r_{ij} ;$$

$$\left(q_j \equiv p(y_j) \, , r_{ij} = p(x_i|y_j)\right)$$

$$p_i = \sum_{j=1}^{m} \pi_{ij} = \sum_{j=1}^{m} p(x_i,y_j)$$

$$q_j = \sum_{i=1}^{n} \pi_{ij} = \sum_{i=1}^{n} p(x_i,y_j)$$

وكما أن مجموعتي الاحتـمالات p_i, q_j (marginal probabilities) تؤديان إلى مقياسي المعلومـات $H(X)$, $H(Y)$ (marginal entropies) عـلى الـترتيب، فـإن مجمـوعـة الاحتـمالات المشـتركـة π_{ij} (joint probabilities)تؤدي إلى مقيـاس المعلومـات المشـتركـة $H(X,Y)$ (joint entropy)، وكـذلـك فـإن مجمـوعتي الاحتـمالات الشرطيـة q_{ij}, r_{ij} (conditional probabilities) تؤديـان إلى مقيـاسي المعلومات الشرطية $H(Y|X)$, $H(X|Y)$ (conditional entropies) على الترتيب.

أمـا المجموعـات الثلاث من الاحتـمالات $\{\pi_{ij}\}$، $\{q_j\}$، $\{p_i\}$ فإنها تـامة (أو

متكاملة (complete sets of probability schemes) حيث أن :

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

$$\sum_{j=1}^{m} q_j = 1$$

$$\sum_{i,j} \pi_{ij} \equiv \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \pi_{ij} = 1$$

ولـذلك فهي تؤدي مبـاشرة إلى مقاييس المعلومـات التاليـة المقابلة لهـا عـلى الترتيب :

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$$

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^{m} q_j \log q_j$$

$$H(X, Y) = -\sum_{i,j} \pi_{ij} \log \pi_{ij} \equiv -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \pi_{ij} \log \pi_{ij}$$

وأما بالنسبة للاحتمالات الشرطية فنلاحظ أن :

مجموعة الاحتمالات $\{q_{i1}, q_{i2}, \ldots\ldots, q_{im}\}$ مجموعة تامة ، لأن :

$$\sum_{j=1}^{m} q_{ij} = 1 ; \qquad i = 1, 2, \ldots., n$$

وبـالتالي فـإنـه يمكن أن نلحق بهـذا الفـراغ الاحتـمالي مقيـاس المعلومـات (الانتروبيا) :

$$H(Y|x_i) = -\sum_{j=1}^{m} q_{ij} \log q_{ij} ; \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

ولايجـاد مقياس للقيمـة المتوسـطة للمعلومات الشرطيـة لهذا النـظام نأخذ متوسط هذه المعلومات الشرطية السابقة بالنسبة لجميع القيم المسموح بها للحدث x_i ، أي أن

(الخط المستقيم الفوقي يعني المتوسط)

$$H(Y|X) = \overline{H(Y|x_i)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i \, . \, H(Y|\, x_i)$$

$$= - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_i \, q_{ij} \log q_{ij}$$

$$= - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \pi_{ij} \log q_{ij}$$

$$= - \sum_{i,j} \pi_{ij} \log q_{ij}$$

وبالمثـــل يمكننا أن نكتـــب

$$H(X|Y) = - \sum_{i,j} \pi_{ij} \log r_{ij}$$

وبالنسبة للمعاني الطبيعيـة لهذه المقـادير فسننـاقشها بـإذن الله تعالى فيما بعد.

ويمكن الحصول على مقاييس المعلومات الشرطية بأسلوب آخر كما يلي:

قيمة المعلومات الذاتية الشرطية بالنسبة للحدث y_j إذا علم أن x_i قد حدث هي:

$$I(y_j|x_i) = - \log q_{ij}$$

وبالتالي فإن القيمة المتوسطة للمعلومات الشرطية $H(Y|X)$ هي:

$$H(Y|X) = \sum_{i,j} p(x_i, y_j) \, . \, I(y_j|x_i)$$

$$= - \sum_{i,j} \pi_{ij} \log q_{ij}$$

كما سبق.

المعلومات المتبادلة I (Mutual Information)

تعريف:

المعلومات التي نحصل عليهـا عن الحدث $X = x_i$ إذا علم حـدوث الحدث $Y=y_i$ هي:

$$I(x_i, y_j) = -\log \frac{p(x_i)}{p(x_i|y_j)} \equiv -\log \frac{p_i}{r_{ij}}$$

وذلك على أساس أن حدوث y_j يغيِّر احتمال x_i من الاحتمال المعروف سـابقاً $p(x_i)$ (a priori probability) إلى الاحتمال المعروف لاحقاً (a posteriori probability) $p(x_i|y_j)$. وبالتالي فإن: لوغاريتم نسبة هذين الاحتمالـين يعطي المعلومات المطلوبة. وبالتالي نحصل على العلاقات التالية:

$$I(x_i, y_j) = -\log \frac{p_i}{r_{ij}} \cdot \frac{q_i}{q_j} = -\log \frac{p_i\, q_i}{\pi_{ij}} \equiv -\log \frac{p(x_i) \cdot p(y_j)}{p(x_i, y_j)}$$

$$= I(y_j, x_i) \equiv -\log \frac{p(y_j)}{p(y_j|x_i)}$$

وبذلك نحصل على التعريف التالي:

تعريف:

قيمة المعلومات المتبادلة بين الحدثين x_i, y_j هي:

$$I(x_i, y_j) = -\log \frac{p_i\, q_i}{\pi_{ij}}$$

وبذلك فإن القيمة المتوسطة للمعلومات المتبادلة بين X, Y هي:

$$I(X,Y) = \overline{I(x_i, y_j)} = \sum_{i,j} \pi_{ij}\, I(x_i, y_j)$$

$$= - \sum_{i,j} \pi_{ij} \log \frac{p_i q_j}{\pi_{ij}} \qquad (*)$$

$$= - \sum_{i,j} \pi_{ij} (\log p_i q_j - \log \pi_{ij})$$

$$= - \sum_{i,j} \pi_{ij} (\log p_i + \log q_j) + \sum_{i,j} \pi_{ij} \log \pi_{ij}$$

$$= - \sum_{i,j} \pi_{ij} \log p_i - \sum_{i,j} \pi_{ij} \log q_j + \sum_{i,j} \pi_{ij} \log \pi_{ij}$$

$$= - \sum_i p_i \log p_i - \sum_j q_j \log q_j + \sum_{i,j} \pi_{ij} \log \pi_{ij}$$

$$= H(X) + H(Y) - H(X,Y) \qquad (**)$$

تعـــريــف:

من الممكن استخـدام العلاقـة التـاليـة كتعـريف آخـر للقيمة المتـوسـطة للمعلومات المتبادلة $I(X,Y)$ (average mutual information) بين X,Y :

$$I(X,Y) = H(X) - H(X|Y)$$

والمعنى الطبيعي لهذا المقـدار سيتضح إن شـاء الله عند مناقشة المـدلولات الـطبيعية لمقـايس المعلومات وخـاصة في الفصـل الثاني من الكتـاب، كما أن هـذا التعـريف يحقق العلاقـة السابقـة (**) كما سنـرى قريبـاً بإذن الله عنـد دراسـة خواص مقاييس المعلومات.

وباستخدام هذا التعريف نحصل على العلاقات التالية:

$$I(X,Y) = - \sum_i p_i \log p_i + \sum_{i,j} \pi_{ij} \log r_{ij}$$

$$= - \sum_{i,j} \pi_{ij} \log p_i + \sum_{i,j} \pi_{ij} \log r_{ij}$$

$$= - \sum_{i,j} \pi_{ij} \log \frac{p_i}{r_{ij}}$$

$$= - \sum_{i,j} \pi_{ij} \log \frac{p_i q_i}{\pi_{ij}}$$

وهي نفس العلاقة السابقة (*) التي سبق استخدامها للتعبير عن I (X,Y)

مثال ١ ـ ٨:

يقوم مصدر ثنائي للمعلومات بإرسال أرقام ثنائيـة (صفر أو واحـد) بحيث أن احتـمال إرسال الصفـر ٤ , ٠ واحتمال إرسـال الواحـد ٦ , ٠، وذلك عـبر قنـاة اتصـال (communication channel) تسبب أحيـانـاً بعض الاخـطاء في عمليـة الإرسال والاستقبال، بحيث أنه إذا أُرسل «صفر» فإن احتـمال استقبالـه «واحداً» يساوي ١٠٪، بينما إذا أُرسل «واحد» فإن احتمال استقباله «صفراً» يساوي ٢٠٪.

أ) احسب ١) القيمة المتوسطة لمعلومات المصدر H(X)

Source Entropy H(X)

٢) القيمة المتوسطة للمعلومات المستقبلة H(Y)

Receiver Entropy

٣) القيمة المتوسطة لمعلومات شبكة الاتصال H(X,Y)

System Entropy

٤) القيمة المتوسطة لمعلومات قناة الاتصال H(Y|X)

Channel Entropy

(أو القيمة المتوسطة للضوضاء والتداخل)

(Noise Entropy)

٥) القيمة المتوسطة للمعلومات المفقودة H(X|Y)

Entropy of losses

٦) القيمـــة المتـوسطة للمعلومـات المتبـادلـة (المــرسلة عــبر القناة)$I(X,Y)$

Mutual Information (Trans information)

ب) حقق العلاقتين التاليتين :

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y|X)$$
$$= H(Y) + H(X|Y)$$

الحــل :

أ) يمكن تمثيل قناة الاتصـال بمصفوفـة الاحتمال الشرطيـة التالية :

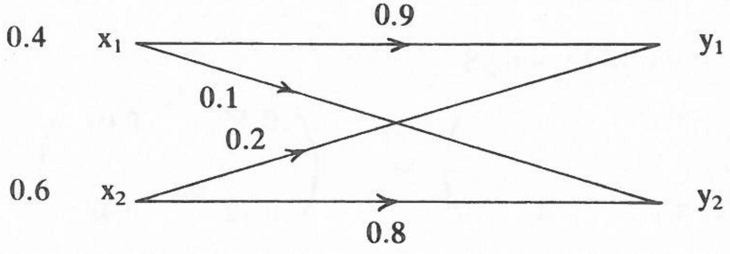
(Conditional probability matrix)

$$Q \equiv \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} p(y_1|x_1) & p(y_2|x_1) \\ p(y_1|x_2) & p(y_2|x_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

ويمكن تمثيلها كذلك بالرسم بالمخطط السهمي للقناة (channel diagram)

كما يلي :



$$H(X) = -\sum_{i=1}^{2} p_i \log p_i = -0.4 \log 0.4 - 0.6 \log 0.6$$

$$= 0.971$$

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^{2} q_j \log q_j$$

$$q_j = \sum_{i=1}^{n} \pi_{ij} = \sum_{i=1}^{2} p_i q_{ij}$$

$$= p_1 q_{1j} + p_2 q_{2j}$$

$$q_1 = p_1 q_{11} + p_2 q_{21} = 0.4 \times 0.9 + 0.6 \times 0.2 = 0.48$$

ملاحظة : يمكن إيجاد هذه القيم بسهولة من المخطط السهمي (انظر الرسم).

$$q_2 = p_1 q_{12} + p_2 q_{22} = 0.4 \times 0.1 + 0.6 \times 0.8 = 0.52$$

ويمكن الحصول على q_2 كذلك من العلاقة $q_1 + q_2 = 1$

$$q_2 = 1 - q_1 = 1 - 0.48 = 0.52$$

$$H(Y) = -0.48 \log 0.48 - 0.52 \log 0.52 = 0.999$$

$$H(X,Y) = -\sum_{i,j} \pi_{ij} \log \pi_{ij}$$

$$\pi_{ij} = p_i q_{ij}$$

$$\pi_{11} = 0.4 \times 0.9 = 0.36$$

$$\pi_{12} = 0.4 \times 0.1 = 0.04$$

$$\pi_{21} = 0.6 \times 0.2 = 0.12$$

$$\pi_{22} = 0.6 \times 0.8 = 0.48$$

$$\Pi \equiv \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.36 & 0.04 \\ 0.12 & 0.48 \end{pmatrix}$$

$$H(X,Y) = -0.36 \log 0.36 - 0.04 \log 0.04 - 0.12 \log 0.12$$
$$- 0.48 \log 0.48$$
$$= 1.592$$

$$H(Y|X) = -\sum_{i,j} \pi_{ij} \log q_{ij}$$
$$= -0.36 \log 0.9 - 0.12 \log 0.2 - 0.04 \log 0.1 - 0.48 \log 0.8$$
$$= 0.621$$

$$H(X|Y) = -\sum_{i,j} \pi_{ij} \log r_{ij}$$

$$r_{ij} \equiv p(x_i|y_j) = \frac{\pi_{ij}}{q_j}$$

- $$r_{11} \equiv p(x_1|y_1) = \frac{0.36}{0.48} = 0.75$$

$$r_{21} \equiv p(x_2|y_1) = \frac{0.12}{0.48} = 0.25$$

$$r_{12} \equiv p(x_1|y_2) = \frac{0.04}{0.52} = \frac{1}{13}$$

$$r_{22} \equiv p(x_2|y_2) = \frac{0.48}{0.52} = \frac{12}{13}$$

$$H(X|Y) = -0.36 \log 0.75 - 0.12 \log 0.25$$
$$- 0.04 \log \frac{1}{13} - 0.48 \log \frac{12}{13}$$

$$= 0.593$$

$$I(X,Y) = H(X) - H(X|Y)$$
$$= 0.971 - 0.593 = 0.378$$

b) (ب)

$$H(X) + H(Y|X) = 0.971 + 0.621 = 1.592$$
$$= H(X, Y)$$
$$H(Y) + H(X|Y) = 0.999 + 0.593 = 1.592$$
$$= H(X, Y)$$

أي أن العلاقتين متحققتان.

خواص مقياس المعلومات
Properties of the Information Measure H

في السطور التالية نقوم بتجميع بعض الخواص الطبيعية المفيدة لمقياس المعلومات H وقد سبق ذكر بعض هذه الخواص ولكن هناك خواصاً أخرى لم نتناولها من قبل. وسنبدأ بتعريف رياضي دقيق لمقياس المعلومات، أو بتعبير أدق لمقاييس المعلومات H_n ثم نثبت نظرية تلخص أهم الخواص (الرياضية) لهذه المقاييس، وتتبع النظرية بنبذة عن المعاني الطبيعية لهذه الخواص أو العلاقات الرياضية التي تحققها هذه المقاييس والتي أثبتناها في هذه النظرية.

تعريف: نفرض أن:

$$\Gamma_n(X) = \left\{ (p_1, p_2, \ldots, p_n) \mid \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, p_i \geqslant 0, i = 1, 2, \ldots, n \right\}$$

هي مجموعة كل التوزيعات الاحتمالية المنتهية التامة (النونية)

complete finite (n−ary) probability distributions.

مقاييس المعلومات (وتُعرف أيضاً باسم انتروبيا شانون Shannon entropy)

هي سلسلة الدوال (Sequence of functions)

$$H_n : \Gamma_n \to R \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

المعرَّفة بالعلاقة:

$$H_n(p_1, p_2, \ldots, p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$$

نظريــة: مقاييس المعلومـات $\{H_n\}$ الواردة في التعـريف السابق تحقق الخـواص التالية:

(١) متماثلة (symmetric) :

$$H_n(p_1, p_2, \ldots, p_n) = H_n(p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_n}),$$

حيث $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ هو أي تبديـل (permutation) لـلأعـداد $(1, 2, \ldots, n)$.

(٢) غير سالبة (non negative):

$$H_n(p_1, p_2, \ldots, p_n) \geqslant 0$$

(٣) متصلة (continuous) :

أي أن الدوال $H_n(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ متصلة بالنسبة للمتغيرات p_i حيث

$$i = 1, 2, \ldots, n; \qquad 0 \leqslant p_i \leqslant 1$$

(٤) سوية أو قياسية (normalized) :

$$H_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1$$

(٥) امتدادية (expansible) :

$$\begin{aligned} H_n(p_1, p_2, \ldots, p_n) &= H_{n+1}(0, p_1, p_2, \ldots, p_n) = \ldots = \\ &= H_{n+1}(p_1, p_2, \ldots, p_i\, 0, p_{i+1}, \ldots, p_n) \\ &= \ldots = H_{n+1}(p_1, p_2, \ldots, p_n, 0); \\ & \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1 \end{aligned}$$

(٦) حاسمة (decisive) :

$$H_2(1, 0) = 0 = H_2(0, 1)$$

(٧) تحقق خاصية النهاية العظمى (maximal) :

$$H_n(p_1, p_2, \ldots, p_n) \leqslant H_n\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right) = \log n$$

$$\forall (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \Gamma_n$$

(٨) تحقق خاصية الإضافية الكاملة:

(completely 'strongly' additive)

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y|X)$$

(٩) تحقق خاصية الإضافية (الاستقلالية):

(independently) additive

إذا كان X,Y مستقلين: $H(X,Y) = H(X) + H(Y)$

(١٠) تحقق متباينة المعلومات الشرطية:

(conditional information inequality)

$$H(Y|X) \leqslant H(Y)$$

(١١) تحقق خاصية تحت الاضافية (subadditive) :

$$H(X,Y) \leqslant H(X) + H(Y)$$

البرهـــان:

(١) تماثل الدوال H_n واضح لأن المجموع $\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$ لا يختلف باختلاف تــرتيــب حدوده.

(٢) نظراً لأن $0 \leqslant p_i \leqslant 1$ فإن $\log p_i \leqslant 0$

وبالتالي فإن :

$$- p_i \log p_i \geqslant 0$$

(مع الأخـذ في الاعتبار أن $0 \log 0 \; := \; 0$

أو أن :

$$(\lim_{x \to 0} x \log x = 0$$

ومجموع مقادير غير سالبة يعطي مقداراً غير سالب.

(٣) الدوال : $x, \log x, x \log x$ دوال متصلة

(٤) $$H_2 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = - \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

(٥) $$H_{n+1} = H_n + 0 \log 0 = H_n + 0 = H_n$$

(٦) $$H_2 (1, 0) = H_2 (0, 1) = - 0 \log 0 - 1 \log 1 = 0 + 0 = 0$$

(٧) المطلوب إثبات أن

$$- \sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i \leqslant \log n$$

أي أن :

$$- \sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i - \log n \leqslant 0$$

الطرف الأيسر يساوي

$$\sum_i p_i \log \frac{1}{p_i} + \log \frac{1}{n}$$

$$= \sum_i p_i \log \frac{1}{p_i} + \sum_i p_i \log \frac{1}{n} \qquad (\sum_i p_i = 1)$$

$$= \sum_i p_i \left(\log \frac{1}{p_i} + \log \frac{1}{n} \right)$$

$$= \sum_i p_i \log \frac{1}{np_i}$$

$$= \sum_i p_i \ln \frac{1}{np_i} \log e$$

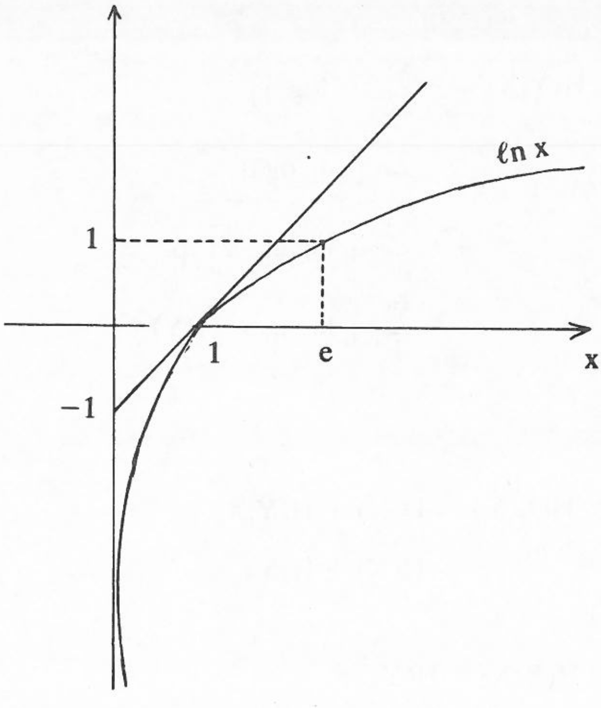
$$\leqslant \log e \sum_i p_i \left(\frac{1}{np_i} - 1 \right)$$

(وذلك باستخدام المتباينة $\ln x \leqslant x - 1$)

$$= \log e \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n} - p_i \right)$$

$$= \log e \left(\frac{1}{n} \cdot n - 1 \right)$$

$$= 0$$



(٨)

$$\begin{aligned} H(X,Y) &= - \sum_{i,j} \pi_{ij} \log \pi_{ij} \\ &= - \sum_{i,j} p_i q_{ij} \log (p_i q_{ij}) \\ &= - \sum_{i,j} p_i q_{ij} \log p_i - \sum_{i,j} p_i q_{ij} \log q_{ij} \\ &= - \sum_{i} p_i \log p_i \sum_{j} q_{ij} - \sum_{i,j} \pi_{ij} \log q_{ij} \\ &= - \sum_{i} p_i \log p_i + H(Y|X) \\ &= H(X) + H(Y|X) \end{aligned}$$

(٩) إذا كان X ، Y مستقلين:

$$p(y_j|x_i) = p(y_j)$$

أي أن:

$$q_{ij} = q_j$$

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= - \sum_{i,j} \pi_{ij} \log q_{ij} \\ &= - \sum_{i,j} p_i q_j \log q_j \\ &= - \sum_{j} q_j \log q_j \,.\, \sum_{i} p_i \\ &= - \sum_{j} q_j \log q_j = H(Y) \end{aligned}$$

ومن الخاصية رقم (٨)

$$\begin{aligned} H(X,Y) &= H(X) + H(Y|X) \\ &= H(X) + H(Y) \end{aligned}$$

(١٠)

$$H(Y|X) - H(Y) =$$

$$= - \sum_{i,j} \pi_{ij} \log q_{ij} + \sum_{j} q_j \log q_j$$

$$= - \sum_{i,j} \pi_{ij} \log q_{ij} + \sum_{j} \sum_{i} \pi_{ij} \log q_j$$

$$= - \sum_{i,j} \pi_{ij} (\log q_{ij} - \log q_j)$$

$$= \sum_{i,j} \pi_{ij} \log \frac{q_j}{q_{ij}}$$

$$= \log e \sum_{i,j} \pi_{ij} \ln \frac{q_j}{q_{ij}}$$

$$= \log e \sum_{i,j} \pi_{ij} \ln \frac{q_j}{q_{ij}}$$

$$\leqslant \log e \sum_{i,j} \pi_{ij} \left(\frac{q_j}{q_{ij}} - 1 \right)$$

$$= \log e \sum_{i,j} (p_i q_j - \pi_{ij})$$

$$= \log e (\sum_{i} p_i \sum_{j} q_j - \sum_{i,j} \pi_{ij})$$

$$= \log e (1 - 1) = 0$$

(١١)

من الخاصية (٨) : $H(X,Y) = H(X) + H(Y|X)$

من الخاصية (١٠) : $\leqslant H(X) + H(Y)$

المعاني الطبيعية لخواص مقياس المعلومات

فيما يلي نعرض للمعاني الطبيعية ومفاهيم الخواص والعلاقات التي ذكرت في النظرية السابقة والتي يحققها مقياس المعلومات H ، حيث نذكر اسم كل

خاصية ومعناها، وذلك بنفس الترتيب الذي وردت به في النظرية.

(١) **متماثلة**: كمية المعلومات لا تتغير بتغير ترتيب العناصر أو الأحداث.

(٢) **غير سالبة**: كمية المعلومات التي يحصل عليها المرء بخصوص حدث ما إما أن تزيد معلوماته أو لا تغيرها ولكنها لا تنقصها، أي لا تجعله جاهلاً أكثر من ذي قبل (قبل حدوث الحدث)، وإن كان البعض يرى أن هذا ليس صحيحاً دائماً وخصوصاً بالنسبة للأحداث السياسية!

(٣) **متصلة**: تغيُّر طفيف في احتمال حدوث حدث ما يجب ألا يمدنا بقدر كبير من المعلومات.

(٤) **قياسية**: التجربة التي لها ناتجان متساويا الاحتمالين (أي أن احتمال كل منهما يساوي $\frac{١}{٢}$) تعطى وحدة واحدة من المعلومات.

(٥) **امتدادية**: إضافة نواتج (outcomes) احتمال حدوث أي منها يساوي صفراً لا يغير من قيمة المعلومات التي نحصل عليها من إجراء تجربة (أو لا يغير من عدم التأكد من نتيجة تجربة ما).

(٦) **حاسمة**: لا يوجد شك أو عدم تأكد في حالة تجربة لها ناتجان، احتمال أحدهما ١ واحتمال الآخر صفر.

(٧) **خاصية النهاية العظمى**: قيمة عدم التأكد من ناتج تجربة ما تكون أكبر ما يمكن عندما تكون كل النواتج المحتملة متساوية الاحتمالات.

(٨) **خاصية الاضافية الكاملة**: المعلومات التي نتوقعها من أي تجربتين تساوي المعلومات التي نتوقعها من التجربة الاولى مضافاً إليها المعلومات الشرطية للتجربة الثانية بالنسبة للاولى.

(٩) **خاصية الإضافية (الاستقلالية)**: المعلومات المتوقعة من تجربتين مستقلتين تساوي مجموع المعلومات المتوقعة من كل من التجربتين على انفراد.

(١٠) **متباينة المعلومات الشرطية**: المعلومات الشرطية لا يمكن أن تكون أكبر من المعلومات غير الشرطية.

(العِلْم السابق بخصوص ناتج تجربة لا يمكن أن يزيد عدم التأكد بالنسبة لناتج تجربة أخرى).

(١١) **خاصية تحت الإضافية**: المعلومات المتوقعة من تجربتين (ليس ضرورياً أن تكونا مستقلتين) ليست أكبر من مجموع المعلومات المتوقعة من كل من التجربتين على انفراد.

نتائج للنظرية السابقة:

أ) نلاحظ أن الدالة $H(X,Y)$ والتي تُعطى بالعلاقة

$$H(X,Y) = -\Sigma\, p(x,y) \log p(x,y)$$

متماثلة بالنسبة للمجموعتين X,Y وحيث أننا أثبتنا في الجزء (٨) من النظرية أن:

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y|X)$$

فيمكننا كذلك أن نستنتج العلاقة التالية

$$H(X,Y) = H(Y) + H(X|Y)$$

ب) مما سبق نستنتج كذلك أن

$$H(X) + H(Y|X) = H(Y) + H(X|Y)$$

أي أن:

$$H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

وحيث أننا عَرَّفنا سابقاً المعلومات المتبادلة $I(X,Y)$ بالعلاقة

$$I(X,Y) = H(X) - H(X|Y)$$

فنستنتج من ذلك أن

$$I(X,Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

والعلاقتان الأخيرتان تعطيان المعلومات المتبادلة I بدلالة مقاييس المعلومات الشرطية والمعلومات غير الشرطية، وذلك بالإضافة إلى العلاقة التالية والتي سبق أن استنتجناها بعد التعريف الأول للمعلومات المتبادلة:

$$I(X,Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y)$$

حـ) الجزء (١٠) من النظرية ينص على أن

$$H(Y|X) \leqslant H(Y)$$

وحيث أن المعلومات المتبادلة I تحقق العلاقة

$$I(X,Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

فنستنتج من ذلك أن

$$I(X,Y) \geqslant 0$$

أي أن قيمة المعلومات المتبادلة $I(X,Y)$ تكون دائماً عدداً غير سالب بينما قيم المعلومات المتبادلة الفردية $I(x_i,y_j)$ قد تكون سالبة لبعض الأزواج (x_i, y_j) ، وذلك لأن:

$$I(x_i, y_j) = -\log \frac{p(x_i)}{p(x_i|y_j)}$$

والاحتمال $p(x_i)$ قد يكون أكبر من أو يساوي أو أقل من الاحتمال $p(x_i|y_j)$ ، وفي الحالة الأولى تكون قيمة $I(x_i, y_j)$ سالبة.

تمرينات
الفصل الأول

تمرينات رقم ١

١ ـ ١ ـ i) كم قدر المعلومات التي نحصل عليها بتحديد عدد أيام شهر إسلامي (عربي)، أي بتحديد إن كان الشهر ٢٩ أو ٣٠ يوماً؟

ii) كم عدد وحدات المعلومات التي تشتمل عليها كل من العبارتين التاليتين عن معركة اليرموك الحاسمة (في سنة ١٥ هـ) والتي انتصر فيها المسلمون (حوالى ٢٤,٠٠٠) على الروم (حوالى ٢٠٠,٠٠٠)؟

أ) يوم اليرموك كان يوم إثنين.

ب) يوم اليرموك كان يوم الإثنين ٥ رجب.

١ ـ ٢ يرسل مصدر للمعلومات ثلاث رسائل m_1, m_2, m_3 بالإحتمالات

$$p_1 = 0.3, \qquad p_2 = 0.5, \qquad p_3 = 0.2$$

على الترتيب.

i) احسب قيمة المعلومات الذاتية لكل رسالة.

ii) احسب القيمة المتوسطة للمعلومات للرسالة الواحدة.

١ ـ ٣ نفرض أن المصدر X عبارة عن مجموعة مكونة من الحدثين الممكنين x_1, x_2 حيث احتمالا حدوثهما : $p_2 = 0.75$ ، $p_1 = 0.25$ ونفرض أن المصدر Y عبارة عن مجموعة مكونة من ثلاثة أحداث ممكنة y_1, y_2, y_3 ترتبط بعناصر المجموعة X بالعلاقات التالية

$$p(y_1 \mid x_1) = 0.25 \qquad p(y_1 \mid x_2) = 0.10$$

$$p(y_2 \mid x_1) = 0.35 \qquad p(y_2 \mid x_2) = 0.70$$

$$p(y_3 \mid x_1) = 0.40 \qquad p(y_3 \mid x_2) = 0.20$$

i) أوجد القيمة المتوسطة لمعلومات المصدر X.

ii) أوجد القيمة المتوسطة لمعلومات المصدر Y.

iii) أوجد القيمة المتوسطة للمعلومات الشرطية $H(X|Y)$.

iv) أوجد القيمة المتوسطة للمعلومات المشتركة $H(X,Y)$.

v) قارن نتيجة الجزء iii) بنتيجة الجزء i) وعقِّب.

١ ـ ٤ في أحد التطبيقات الخاصة لشفرة (مورس) (Morse code) احتمال النقطة (dot) يساوي 0.45 ، واحتمال الشرطة (dash) يساوي 0.45 ، واحتمال الفراغ (space) يساوي 0.10.

ما هي القيمة المتوسطة للمعلومات بالنسبة لرسالة مكونة من مائة رمز من هذه الرموز بفرض أنها مستقلة عن بعضها البعض؟

١ ـ ٥ تم تحويل رسالة باستخدام إحدى الشفرات إلى الرمزين الثنائيين 1 , 0 حيث احتمال إرسال الصفر هو $p(0) = 0.4$ واحتمال إرسال الواحد هو $p(1) = 0.6$.

وينتج عن الإرسال عبر قناة الإتصال بعض الأخطاء حيث يتحول الصفر 0 إلى واحد 1 باحتمال 0.2، بينما يتحول الواحد 1 إلى صفر 0 باحتمال 0.1

i) أوجد احتمال استقبال صفر 0.

ii) أوجد احتمال استقبال واحد 1.

iii) احسب القيمة المتوسطة للمعلومات للرمز الواحد عند جهة الاستقبال (receiver entropy).

iv) احسب القيمة المتوسطة لمعلومات القناة

(channel entropy, or entropy of noise or error)

١ ـ ٦ يرسل مصدر مستقل للمعلومات حروفاً مختارة من مجموعة أبجدية تتكون من ثلاثة حروف A,B,C وذلك بالاحتمالات التالية على الترتيب:

$$p_A = 0.7, \quad p_B = 0.2, \quad p_C = 0.1$$

i) أوجد القيمة المتوسطة للمعلومات للحرف الواحد

ii) إذا كانت الحروف المتتالية (consecutive letters) مستقلة إحصائياً عن بعضها البعض (statistically independent) وأرسل المصدر كلمات مزدوجةً أي تتكون كل كلمة من حرفين (two-letter words)، فأوجد احتمالات جميع الكلمات المزدوجة، والقيمة المتوسطة لمعلومات النظام (system) الذي يشتمل على هذه الكلمات.

١ ـ ٧ ترسل الثلاث رسائل x_1, x_2, x_3 المتساوية الاحتمالات مستقلة عن بعضها البعض خلال قناة للمعلومات. فإذا كانت مصفوفة الانتقال (transition matrix) لهذه القناة هي:

$$P(Y|X) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

فأوجد قيمة المعلومات المتبادلة $I(X,Y)$ خلال القناة.

١ ـ ٨ يشتمل مصدر مستقل للمعلومات على أربعة رموز

$\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$، وتُرسَل رسائل المصدر خلال قناة ضوضائية (noisy channel)

يشتمل مخرجها على ثلاثة رموز $\{b_1, b_2, b_3\}$. وتُعرَّف مصفوفة الاحتمالات المشتركة $P(A,B)$ للأزواج المرسلة والمستقبلة كما يلي:

$$P(A,B) = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.25 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0.3 & 0.05 \\ 0.10 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0.15 \end{pmatrix} \end{array}$$

i) كوِّن مصفوفة القناة $P(B|A)$.

ii) أوجد $P(A)$: مجموعة احتمالات رموز المصدر

وكذلك $P(B)$: مجموعة احتمالات رموز المخرج

iii) أوجد

أ) القيمة المتوسطة لمعلومات المصدر source entropy $H(A)$

ب) القيمة المتوسطة للمعلومات المستقبلة receiver entropy $H(B)$

حـ) القيمة المتوسطة لمعلومات النظام system entropy $H(A,B)$

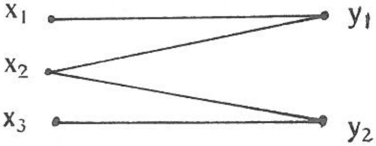
ء) القيمة المتوسطة لمعلومات القناة channel entropy $H(B|A)$

هـ) القيمة المتوسطة للمعلومات المتبادلة mutual information $I(A,B)$

١ ـ ٩ يحتوي مصدر لإرسال المعلومات على مجموعة الإرسال $X = \{x_1, x_2, x_3\}$، بينما يستقبل جهاز الاستقبال أحد عناصر مجموعة الاستقبال $Y = \{y_1, y_2\}$.

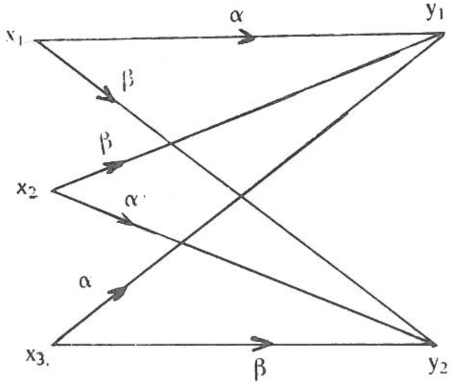
فإذا كانت الاحتمالات المشتركة للاتصال $P(X,Y)$ تعطي بالمصفوفة التالية:

$$
\begin{array}{c}
\\
x_1 \\
x_2 \\
x_3
\end{array}
\begin{array}{cc}
y_1 & y_2 \\
\left(\begin{array}{cc}
0.15 & 0 \\
0.6 & 0.2 \\
0 & 0.05
\end{array}\right)
\end{array}
$$



فما هي قيمة المعلومات المتبادلة (mutual information) المرسلة عبر القناة من المصدر إلى جهاز الإستقبال؟

١ ـ ١٠ الشكل المرسوم يعطي الاحتمالات الشرطية $P(Y|X)$ لعناصر المجموعة $Y = \{ y_1, y_2\}$ بالنسبة لعناصر المجموعة $X = \{ x_1, x_2, x_3\}$. فإذا كانت احتمالات عناصر المجموعة X هي $P(X) = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\}$



أ) فما هي كل من α, β التي تجعل المجموعتين X,Y مستقلتين (independent)؟

ب) وما هي القيمة المتوسطة لمعلومات كل من المجموعتين في هذه الحالة $H(X)$, $H(Y)$؟

حـ) وما هي القيمة المتوسطة لمعلومات المجموعة $H(X,Y)$؟

١ ـ ١١ يقوم مصدر مستقل للمعلومات S بإرسال عناصر مختارة من مجموعة الحروف (س ، ص ، ع) بالاحتمالات (٢ , ٠ ، ٦ , ٠ ، ٢ , ٠) على الترتيب.

أ . ما هي قيمة المعلومات الذاتية لكل حرف من هذه الحروف؟

ب . ما هي القيمة المتوسطة لمعلومات المصدر S (أي القيمة المتوسطة للمعلومات للحرف الواحد)؟

جـ. إذا فرضنا أن المصدر يقوم بإرسال كلمات بحيث أن كل كلمة تتكون من حرفين من المجموعة السابقة، وأن الحروف المتتالية مستقلة عن بعضها البعض.

فما هو احتمال إرسال كل كلمة من هذه الكلمات؟

وما هي القيمة المتوسطة لمعلومات مجموعة هذه الكلمات (S^2)

وما علاقتها بالقيمة المتوسطة لمعلومات المصدر S (أي معلومات مجموعة الحروف)؟

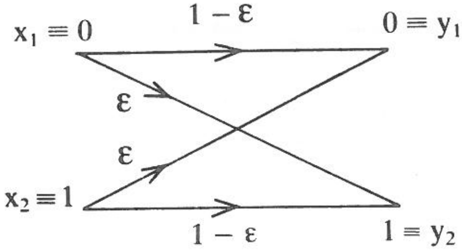
١ - ١٢ أ) من الخصائص الطبيعية التي يحققها مقياس المعلومات: خاصية الإضافة: $H(X,Y) = H(X) + H(Y)$ ، وخاصية تحت الإضافة: $H(X,Y) \leqslant H(X) + H(Y)$ فما معنى كل من هاتين الخاصيتين، وما الفارق بينهما؟

ب) يتم الاتصال بين جهاز الإرسال الذي تحتوي مجموعة رسائله X على خمسة عناصر وجهاز الاستقبال الذي تحتوي مجموعة رسائله المستقبلة Y على أربعة عناصر بناءً على الاحتمالات المشتركة الآتية:

$$P(X,Y) = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0.10 & 0.30 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0.10 & 0 \\ 0 & 0 & 0.05 & 0.10 \\ 0 & 0 & 0.05 & 0 \end{bmatrix}$$

فأي الخاصيتين السابقتين يحققها هذا النظام للاتصالات، ولماذا؟

١ ـ١٣ نفرض أن العنصرين 0 , 1 يُرسَلان باحتمالين متساويين عبر قناة اتصال ثنائية متماثلة بحيث أن احتمال وصول أي من العنصرين صحيحاً يساوي $1 - \varepsilon$ واحتمال وصوله خطأ يساوي ε (كما هو مبين بالشكل).



١) أوجد احتمال استقبال كل من العنصرين 1 ، 0

٢) أوجد القيمة المتوسطة لكل من المعلومات التالية:

أ ـ المعلومات المستقبلة $H(Y)$

ب ـ معلومات القناة (الضوضاء) $H(Y|X)$

حـ ـ المعلومات المتبادلة $I(X,Y)$ بين المصدر وجهة الاستقبال والمرسلة عبر القناة.

٣) ارسم المنحنيات التي تبين تغير كل من قيم المعلومات المذكورة في ٢) مع تغير ε .

٤) احسب قيمة المعلومات المتبادلة I عندما $\varepsilon = 0.5$ ، مع توضيح المعنى الطبيعي لهذه النتيجة.

١ ـ١٤ الجدول التالي يعطي مجموعة من العناصر المتتالية التي أرسلها مصدر ثنائي للمعلومات عبر قناة اتصال ثنائية، والعناصر المقابلة التي تمّ استقبالها.

x	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
y	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1

فإذا رمزنا لمجموعة عناصر الإرسال بالرمز X حيث $X = \{0,1\}$ ، ولمجموعة عناصر الاستقبال بالرمز Y حيث $Y = \{0,1\}$ ، فاستخدم البيانات السابقة لإيجاد:

١) احتمالات الارسال $P(X)$ واحتمالات الاستقبال $P(Y)$

٢) مصفوفة القناة $P(Y \mid X)$ وبالتالي رسم المخطط السهمي للقناة.

٣) مصفوفة الاحتمالات المشتركة $P(X,Y)$

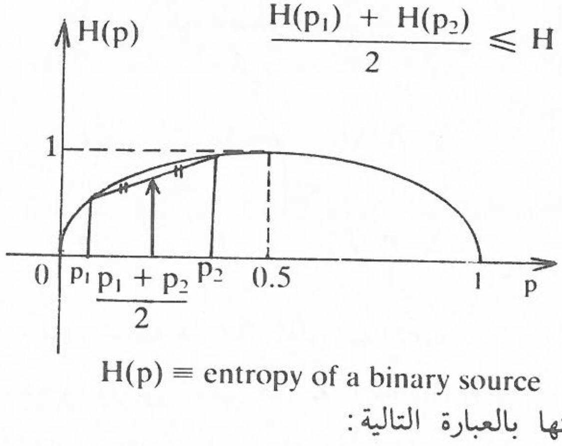
٤) القيمة المتوسطة للمعلومات المفقودة $H(X \mid Y)$

٥) قيمة المعلومات المتبادلة $I(X,Y)$

١ ـ١٥ نفرض أن $H(p)$ ترمز إلى متوسط قيمة المعلومات لمصدر معلومات ثنائي ، حيث $H(p) = -p \log p - (1 - p) \log (1 - p)$.

ومن منحنى التطبيق $H(p)$ المبين بالرسم نلاحظ الخاصية التالية:

$$\frac{H(p_1) + H(p_2)}{2} \leqslant H\left(\frac{p_1 + p_2}{2}\right) \quad (*)$$



H(p) ≡ entropy of a binary source

والتي يمكن صياغتها بالعبارة التالية:

نفرض أن عندنا ثلاثة مصادر ثنائية للمعلومات S_1, S_2, S_3 للاتصال بين محطتين، وأن احتمالات عناصرها على الترتيب هي:

$\{p_1,\ 1-p_1\},\ \{p_2,\ 1-p_2\},\ \{p_3,\ 1-p_3\}$ بحيث أن $p_3 = \dfrac{p_1 + p_2}{2}$

(أي أن احتمال كل من عنصري المصدر الثالث يساوي متوسط احتمالي العنصرين المقابلين في المصدرين الأول والثاني). فإن متوسط قيمة معلومات المصدر الثالث أكبر من أو تساوي المتوسط الحسابي لمتوسطي قيمة معلومات المصدرين الأول والثاني، أو بأسلوب آخر فإنه من الأصعب التنبؤ بالعناصر المرسلة من المصدر الثالث.

المطلوب: أ) تحقيق هذه المتباينة (*) بالمثال التالي:

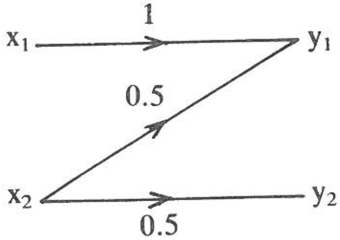
$$P(S_1) \equiv \{p_1,\ 1-p_1\} = \{\tfrac{1}{3}\ ،\ \tfrac{2}{3}\}\ ,\ P(S_2) \equiv \{p_2,\ 1-p_2\} = \{\tfrac{1}{4}\ ،\ \tfrac{3}{4}\}$$

ب) متى تتحقق علاقة التساوي في المتباينة (*)؟

١ ـ١٦ تُعرَّف سعة قناة الاتصال بأنها أقصى قيمة تصل إليها المعلومات المتبادلة $I(X,Y)$ عبر القناة مع تغيير احتمالات عناصر مجموعة الإرسال $\{p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n\}$.

نفرض أن المصدر الثنائي

$$\begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$



سيرسل رسائله عبر قناة المعلومات الثنائية المبينة بالشكل (والتي تسمى قناة Z-channel: Z).

١) أوجد تعبيراً للمعلومات المتبادلة $I(X,Y)$ عبر القناة بدلالة المتغير P.

٢) ما هي قيمة p التي تجعل قيمة المعلومات المتبادلة I أكبرما يمكن، أي تصل إلى سعة القناة؟ وما قيمة هذه السعة؟

٣) عند هذه القيمة للمتغير p احسب القيمة المتوسطة لكل من معلومات المصدر H(X)، ومعلومات جهة الاستقبال H(Y)، والضوضاء H(Y | X)، والمعلومات المفقودة H(X | Y).

١ ـ ١٧ يحتوي مصدر المعلومات S على ٢٧ رمزاً هي حروف اللغة الإنجليزية وعددها ٢٦ حرفاً، والفراغ (space). والشكل التالي يبين احتمالات هذه الرموز، والقيمة المتوسطة لمعلومات هذا المصدر.

Space	A	B	C	D	E	F
.186	.064	.013	.022	.032	.103	.021
G	H	I	J	K	L	M
.015	.047	.058	.001	.005	.032	.020
N	O	P	Q	R	S	T
.057	.063	.015	.061	.048	.051	.080
U	V	W	X	Y	Z	
.023	.008	.018	.001	.016	.001	

$$H(S) = \sum_{S} P_i \log \frac{1}{P_i}$$
$$= 4.03 \text{ bits/symbol}$$

أرسَلَ هذا المصدر الرسالة التالية:

(*) JIHAD IS THE ONLY WAY حيث يوجد فراغ واحد بين كل كلمتين متتاليتين.

(١) احسب قيمة المعلومات الذاتية لكل حرف من حروف كلمة JIHAD.

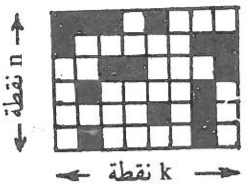
(٢) احسب القيمة الكلية للمعلومات التي نحصل عليها باستقبال كلمة JIHAD وذلك بطريقتين:

(أ) مجموع قيم المعلومات الذاتية.

(ب) استخدام القيمة المتوسطة للمعلومات H.

(٣) احسب القيمة الكلية للمعلومات التي نحصل عليها باستقبال الرسالة السابقة (*)، مقاسة بعدد الوحدات الثنائية وباستخدام القيمة المتوسطة للمعلومات H.

١ ـ ١٨ نفرض أن لدينا مجموعة من المواضع أو النقـاط (array of points) مـرتبـة في n صف و k عمود كما هو مبين بالشكل رقم ١، وأن كل نقطة يمكن أن تكـون بيضـاء أو سـوداء (أي هنـاك احتمالان فقط). ونظراً لأن العدد الكلي للنقاط هو nk نقطة، فيكون عدد الأشكال أو النماذج المختلفة (distinct patterns) التي يمكن الحصول عليها مساوياً 2^{nk}.



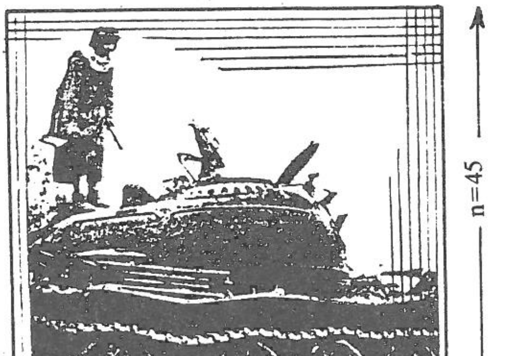
شكل (رقم ١)

(**ملاحظة**: إذا كانت هذه النقاط أو المواضع مرتبة في بُعْد واحد فقط ـ أي صف واحـد ـ وليس بُعْدين، فـإن عدد النماذج المختلفة 2^{nk} لا يتغير، وإنما الذي يتغير فقط هو الشكل الهندسي).

إذا فرضنا أن S مصدر معلومات ثنائي يتكون من العنصرين: نقـطة بيضاء، ونقطة سوداء، وأن احتماليهما متساويان، وأن العناصر التي يـرسلها المصدر مستقلة عن بعضها البعض، وأنها ترتب في الشكل الهندسي المستطيل المبين (أي مصفوفة من n صف و k عمود).

(١) ما هو احتمال إرسال نموذج معين (كالمبين بشكل رقم ١ مثلاً ـ أي ما هو احتمال ظهور النقاط البيضاء والسوداء في المستطيل بالصورة الموضحة في هذا الشكل)؟

(٢) كم قـدر المعلومات التي نحصل عليها بمعرفة هـذا النموذج أو هـذه الصورة؟



شكل (رقم ٢)

(٣) كم عدد وحدات المعلومات التي نحصل عليها بمشاهدة الصورة المربعة الشكل المبينة في شكل رقم ٢ وهي لأحد المجاهدين الآفغان على دبابة روسية بعد استيلاء المجاهدين عليها، علماً بأن طول المربع يتكون من ٤٥ نقطة.

(٤) كم عدد وحدات المعلومات التي تشتمل عليها العبارة التالية عن الغزو الروسي الكافر لأفغانستان سنة ١٩٧٩ : بدأ الغزو يوم الخميس ٢٧ ديسمبر.

١ ـ ١٩ وصِّلت القناة الثنائية المتماثلة المعرَّفة بمصفوفة القناة

$$P(Y|X) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

بمصدر ثنائي

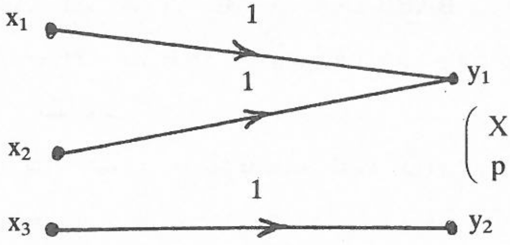
$$\begin{pmatrix} X \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ p_1 & P_2 \end{pmatrix}$$

أحسب النسبة بين المعلومات المتبادلة $I(x,y)$ في الحالتين التاليتين:

(أ) $p_1 = \frac{3}{4} \quad , \quad p_2 = \frac{1}{4}$

(ب) $p_1 = P_2 = \frac{1}{2}$

١ ـ ٢٠ الشكل المرسوم عبارة عن المخطط السهمي لإحدى القنوات. وصِّلت هذه القناة بالمصدر التالي:



$$\begin{pmatrix} X \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \alpha & \beta & 1-\alpha-\beta \end{pmatrix}$$

(١) اثبت أن (أ) هـذه القناة تحقق العـلاقـة $H(Y|X)=0$ (أي أنها عـديمـة الضوضاء).

(ب) قيمـة المعلومات المتبـادلة $I(X,Y)$ تسـاوي قيمة المعلومـات المستقبلة $H(Y)$.

(٢) ما هو الشرط الذي يجب أن تحققه احتـمالات الاستقبال $P(Y)$ حتى تصـل قيمة المعلومات المستقبلة $H(Y)$ (وبالتالي قيمة المعلومات المتبـادلة $I(X,Y)$) إلى نهايتها العظمى؟

(٣) كم تسـاوي القيمة العـظمى للمعلومات المتبـادلة $I(X,Y)$؟ (هـذه القيمـة تسمى سعة القناة).

(٤) ما هي احتمالات عناصر المصدر $P(X)$ التي تؤدي إلى تحقق الشرط المذكور في (٢).

١ - ٢١ (أ) نفرض ان مصدر المعلومات $\begin{pmatrix} A & B \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} X_1 \\ P_1 \end{pmatrix}$ يـرسـل معلوماته عبر قناة ثنائية متماثلة احتمال الخطأ فيا يساوي p.

المطلوب: إيجاد العلاقة التي تعطى المعلومات المتبادلة I بدلالة الاحتمال p.

(ب) نفرض أن مصدراً ثنائياً للمعلومات $\begin{pmatrix} X_2 \\ P_2 \end{pmatrix}$ أرسل الرسالة التالية المكوَّنة من عدة رموز متتالية عبر قناة ثنـائية متـماثلة (ق) احتمال الخـطأ فيها يساوي p، فكانت الرسالة المكوَّنة من الرموز المستقبلة عند جهة الاستقبال Y كما هو مبين فيما يلي:

الرسالة المرسَلة : AABAAABABBAAAAAABBAABAAABBAABA

الرسالة المستقبلة : a a b b a a b a a b a a b a a a b b a b b a a a b a a a b b

المطلوب:

(١) كتابة عناصر مصفوفة هذه القناة (ق)، ورسم مخططها السهمي.

(٢) حسـاب كل من (i) عنـاصر مصفوفـة الاحتمالات الشرطيـة العكسيـة $P(X|Y)$

(ii) عناصر مصفوفة الاحتمالات المشتركة $P(X,Y)$

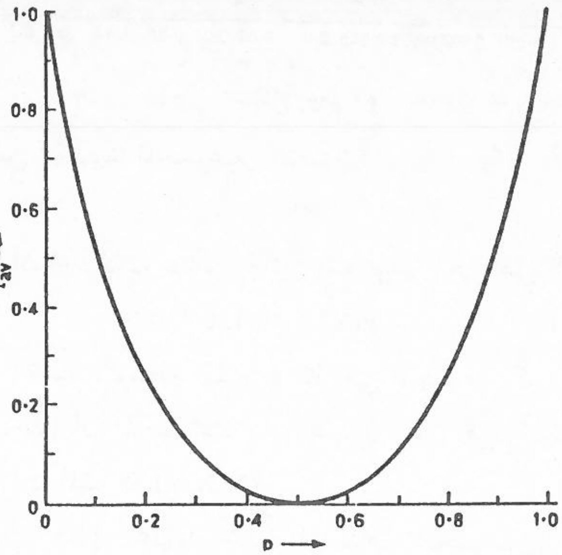
(ii) احتمال استقبال كل من الرمزين a, b

(جـ) نفرض أن مصدر امعلومات الثنائي $\begin{pmatrix} X_1 \\ P_1 \end{pmatrix}$ المُعرَّف في (أ) قد وُصِّلَ عند مدخل القناة السابقة (ق) المُعرَّفة في (ب) ليرسل معلوماته عبر هذه القناة

المطلوب:

(١) إيجاد قيمة المعلومات المتبادلة I عبر القناة (ق).

(٢) التحقق من أن هذه القيمة تتفق مع القيمة التي يعطيها المنحنى التالي (في الشكل رقم ١ أو الشكل رقم ٢) والذي يمثل العلاقة بين المعلومات المتبادلة I عبر القناة المتماثلة ذات احتمال الخطأ p، وهذا الاحتمال p. وإن كان هناك اختلاف فما هو السبب؟

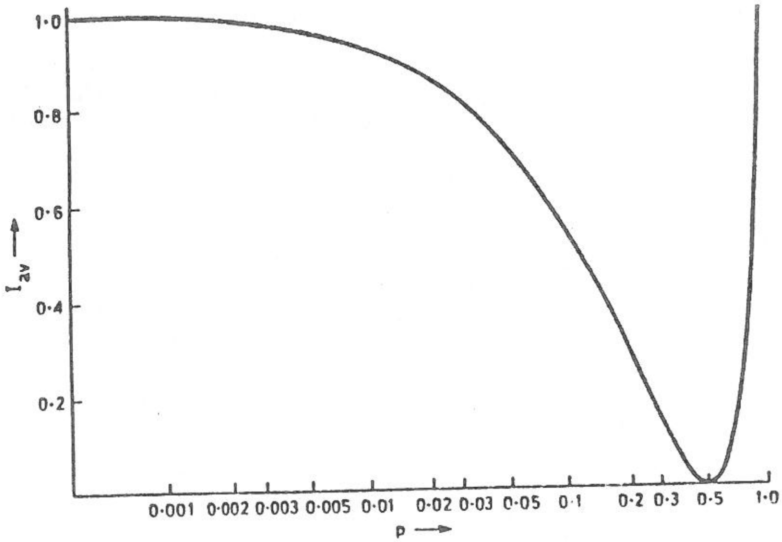


شكل (رقم ١)

(ملاحظة: المنحنى في الشكل رقم ٢ مرسوم بمقياس أفقي لوغاريتمي)

(٣) نفرض أن المصدر $\left(\begin{matrix} X_1 \\ P_1 \end{matrix}\right)$ أرسل الرسالة التالية عبر القناة (ق)، فما هي الرسالة المستقبلة؟ ولماذا؟

AAAAAAAAABBBBBBBBB



شكل (رقم ٢)

١ ـ ٢٢ نفرض أن لدينا المجموعتين التاليتين:

$X = \{1, 2\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$

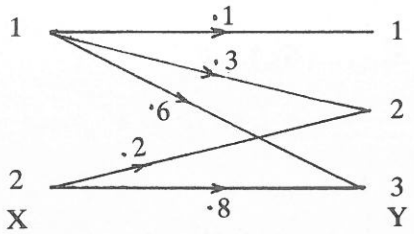
أ) نفرض أن احتمالات عناصر هاتين المجموعتين هي على الترتيب:

$P(X) = \{0.2, 0.8\}$, $P(Y) = \{0.1, 0.3, 0.6\}$

فما هي القيمة المتوسطة لمعلومات كل من المجموعتين؟

وإذا فرضنا أن المجموعتين مستقلتان، فما هي القيمة المتوسطة للمعلومات المشتركة $H(X,Y)$؟

ب) نفرض أن هناك اعتمادا داخلياً بين عناصر المجموعتين، (inter-symbol dependence) تمثله الاحتمالات الشرطية $P(Y|X)$ والتي يبينها المخطط السهمي التالي:



فما هي :

(١) القيمة المتوسطة للمعلومات الشرطية $H(Y|X)$؟

(٢) القيمة المتوسطة للمعلومات الكلية (المشتركة) $H(X,Y)$؟

وكم الفارق بين هذه القيمة والقيمة السابقة في (أ) في حالة الاستقلال؟

(ملاحظة: هذا الفارق يمثل الإطناب redundancy الذي يسببه الاعتماد الداخلي ين رموز المجموعتين، والذي تعبر عنه الاحتمالات الشرطية $P(Y|X)$).

١ ـ ٢٣ من المتباينات التي تظهر في نظرية المعلومات المتباينة التالية (والتي تُعرف باسم متباينة شانون Shannon Inequality):

$$H_n(p_1, ..., p_n) \equiv -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i \leq -\sum_{i=1}^{n} p_i \log q_i$$

حيث: $$\sum_i p_i = 1 \ , \quad \sum_i q_i = 1$$

المطلوب: إثبات هذه المتباينة: (إرشاد: يمكن الاستعانة بالمتباينة $\ell n\ x \leq x-1$)

١ ـ ٢٤ نفرض أن S هو مصدر المعلومات التالي:

$$\begin{pmatrix} S \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 & .... & S_n \\ p_1 & p_2 & .... & p_n \end{pmatrix}$$

كَوِّن مصدراً جديداً للمعلومات S' عدد رموزه ضعف عدد رموز المصدر S، أي أن:

$$S' = \{S'_1, S'_2, ..., S'_n, S'_{n+1}, ..., S'_{2n}\}$$

واحتمالات رموز المصدر 'S تُعَرَّف كما يلي:

$$P'_i = \begin{cases} (1-\varepsilon)p_i \; .... \; i = 1, 2, ..., n \\ \varepsilon p_{i-n} \; ... \; i = n+1, n+2, ..., 2n \end{cases}$$

عَبِّر عن H(S') : القيمة المتوسطة لمعلومات المصدر 'S

بدلالة H(S) : القيمة المتوسطة لمعلومات المصدر S.

١ ـ ٢٥ من الخواص التي يحققها مقياس المعلومات H الخاصية التالية والتي تُسَمَّى خاصية التشعيب أو التفريع (branching property) أو الخاصية التكريرية أو الإرجاعية (recursivity property):

نفرض أن مجموعة الأحداث (events) في نظامٍ ما، أو النتائج (outcomes) في تجربةٍ ما هي: $x_1, x_2, ..., x_n$ وان احتمالاتها على الترتيب

هي: $p_1, p_2, ..., p_n$، حيث: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

فإن:

$$\left.\begin{aligned} &H_n(p_1, p_2, p_3, p_4, ..., p_n) = \\ &H_{n-1}(p_1+p_2, p_3, p_4, ..., p_n) + (p_1+p_2).H_2\left(\frac{p_1}{p_1+p_2}, \frac{p_2}{p_1+p_2}\right); \end{aligned}\right\} (*)$$

بشرط أن $P_1+P_2 > 0$

أو بصيغة أخرى:

$$\left.\begin{aligned} &H_n(p(1-q), pq, p_3, p_4, ..., p_n) = \\ &H_{n-1}(p, p_3, p_4, ..., p_n) + p.H_2(1-q, q) \end{aligned}\right\} (**)$$

[حيث: $p_1 \leftrightarrow p(1-q)$, $p_2 \leftrightarrow pq$, $p_1+q_2 \leftrightarrow p$]

ومعنى هذه الخاصية أنه بتشعيب أو انقسام (splitting) حدثٍ ما في نظام أو نتيجةٍ ما في تجربة ـ وليكن الحدث الأول مثلاً ـ إلى حدثين احتمالاهما الشرطيان 1-q,q فإن مقدار عدم التأكد (uncertainty) يزيد بمقدار عدم التأكد $H_2(1\text{-}q,q)$

الخاص بهذا الإنقسام، والذي ينشأ فقط عند حدوث (أي بشرط حدوث) الحدث الأصلي والذي احتماله P.

المطلوب: إثبات هذه الخاصية إما بإثبات العلاقة (*) أو العلاقة (**).

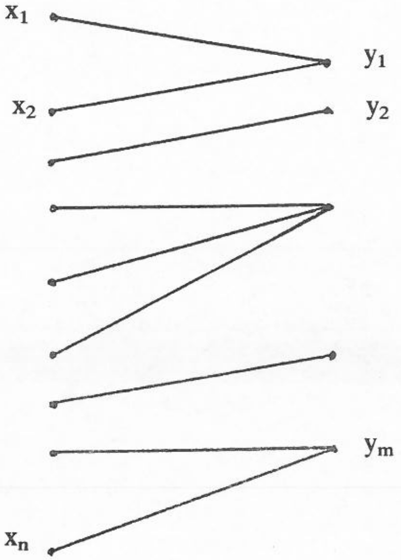
١ ـ ٢٦ نفرض أن X متغير عشوائي متقطع (discrete random variable) يأخذ القيم التالية:

$x_1 , x_2, \ldots, x_n$

ونفرض أن Y متغير عشوائي مُعرَّف بالعلاقة

$$Y = f(X)$$

حيث f دالة اختيارية (تطبيق اختياري)، أي أنه إذا أُعطينا أي قيمة x_i للمتغير X، أمكننا بالضبط تحديد القيمة المقابلة y_i للمتغير Y عن طريق الدالة f (كما في المثال المبين بالشكل).



X $\quad$ $Y = f(X)$ $\quad$ Y

أ) كم تساوي القيمة المتوسطة للمعلومات الشرطية H(Y|X)؟ ولماذا؟

ب) أثبت أن:

$$H(Y) \leqslant H(X) \qquad (*)$$

[إرشاد: استخدم العلاقة

$$H(X) + H(Y|X) = H(Y) + H(X|Y)$$

والنتيجة التي حصلت عليها في أ)].

حـ) ما هي قيمة $H(X|Y)$ التي تؤدي إلى تحقُّق التساوي في المتباينة السابقة (*)؟ ولماذا؟ وماذا تعنى هذه القيمة بالنسبة للتقابل بين قيم X وقيم Y؟ وبالتالي ـ أو بأي طريقة أخرى ـ

د) ما هي الشروط التي يجب أن تحققها الدالة f حتى تتحقق علاقة التساوي في المتباينة السابقة (*)، أي حتى نحصل على العلاقة $H(X) = H(Y)$؟

الفصل الثاني
نظم الاتصال وقنوات المعلومات

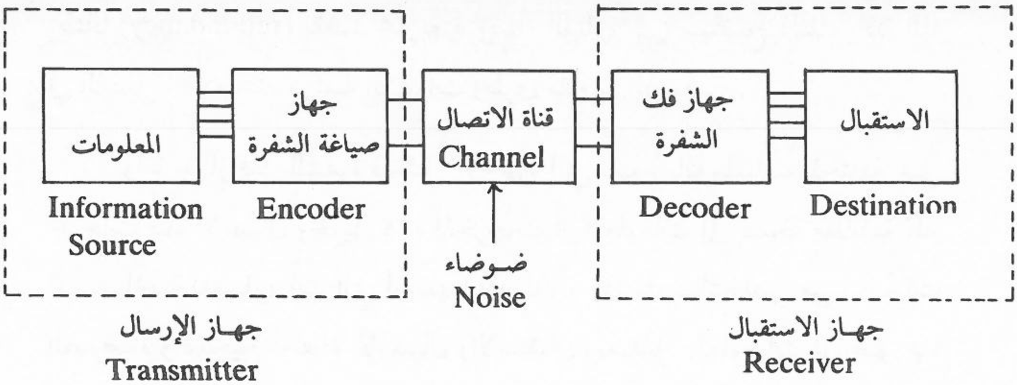
* سعة القناة .
* الإطناب .
* كفاءة الإرسال .
* بعض القنوات الخاصة وسعاتها .
* القناة المنتظمة والثنائية المتماثلة والثنائية العامة .
* القنوات المتصلة على التوالي .
* القنوات المتصلة على التوازي .
* نظرية القنوات المتتابعة .
* نظرية تشغيل البيانات .
* طريقة مروجا لحساب سعة القناة.
* اختزال القنوات.

الفصل الثاني

نظم الاتصال وقنوات المعلومات

Communication Systems and Information Channels

يبيِّن الشكل التالي رسماً تخطيطياً مبسطاً لنظام اتصالات يقوم بإرسال المعلومات أو البيانات عند موضع ما ثم استقبالها عند موضع آخر.



رسم تخطيطي لنظام اتصالات

يقوم المصدر بإرسال المعلومات والتي قد تمثلها مثلاً موجة صوتية، أو سلسلة متتابعة من الأرقام الثنائية (binary digits) من شريط مغناطيسي، أو مخرجات (output) مجموعة أجهزة الإحساس (sensors) في سفينة فضاء، أو

النبضات التي ترسل من أجهزة الرادار. وترسل المعلومات عبر قناة اتصال والتي قد تكون مثلاً خطاً تليفونياً أو خط اتصال راديو عالي التردد (high frequency radio link) ، أو وسطاً للتخزين (storage medium) أو خط اتصال فضائي.

وتتعرض قناة الاتصال عادة لأنواع مختلفة من الضوضاء والاضطرابات والتشويش فمثلاً في حالة الخط التليفوني قد تأخذ هذه الضوضاء صورة تداخل (crosstalk) من خطوط تليفونية أخرى أو ضوضاء حرارية (thermal noise).

أما جهاز صياغة الشفرة فيمثل كافة الأجهزة التي تقوم بإجراء العمليات المختلفة على معلومات المصدر قبل إرسالها عبر القناة، وقد تشمل هذه العمليات مثلاً تعديل أو تحويل المعلومات من صورتها التي خرجت بها من المصدر إلى صورة أخرى قابلة للإرسال عبر القناة أو أي مزيج من عمليات التعديل (modulation) واختصار البيانات (data reduction) ، وإدخال بعض المعلومات والتي تعد إطناباً (redundancy) بقصد محاربة ضوضاء القناة، كما سيتضح ذلك بإذن الله في الفصل القادم عند دراسة الشفرات وطرق مقاومة الضوضاء.

وأما جهاز فك الشفرة فيمثل الأجهزة التي تقوم بالعمليات المختلفة على مخرجات قناة الاتصال وتحويل هذه المخرجات أو المعلومات إلى نسخة مطابقة قدر الاستطاعة للمعلومات التي أرسلها المصدر، وذلك بالتخلص من تأثيرات الضوضاء وتصحيح أخطاء الإرسال والاستقبال وتعديل المعلومات الى صورتها الأصلية التي أطلقها المصدر بحيث تصل بهذه الصورة الأصلية إلى جهة الاستقبال.

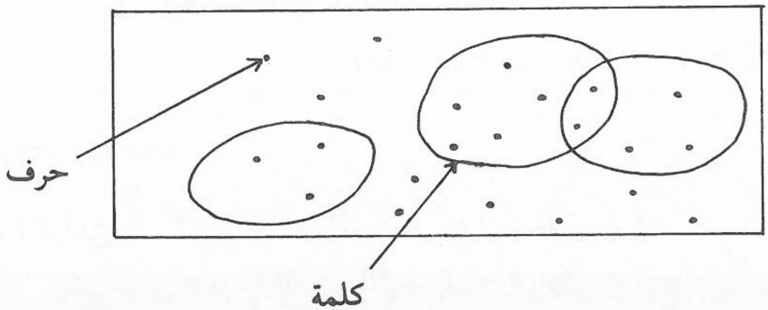
تعريفات:

يمكن تعريف المصدر (source) رياضياً بأنه عبارة عن مجموعة أبجدية (alphabet) X تتكون من عدد محدود من العناصر المتباينة والتي تسمى حروفاً

أبجدية أو رموزاً (letters, characters, symbols) ونشير إليها بالرموز التالية

$$x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$$

وتسمى مخرجات المصدر (source output) رسائل (messages) أو كلمات (words) حيث تُعَدُّ الكلمة سلسلة محدودة (finite sequence) (بالنسبة للزمن) من عدة حروف مختارة من المجموعة الابجدية X



وإذا كانت احتمالات اختيار الحروف المتتالية مستقلة، أي أن الاختيار يتم بناءاً على توزيع احتمالي ثابت

$$\left\{ p(x_1), p(x_2), \ldots, p(x_n) \right\} \equiv \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$$

فإن المصدر يسمى مصدراً عديم الذاكرة (memoryless source) وإلا فهو مصدر ذو ذاكرة (source with memory) . وكل المصادر التي نتناولها في هذا الكتاب هي من النوع عديم الذاكرة.

وإذا كانت المجموعة الأبجدية للمصدر مكونة من حرفين فقط، فإن المصدر يسمى مصدراً ثنائياً (binary source) .

ويمكننا القول بأن:

- المصدر يقابل فراغ تجربة عشوائية (space of a random experiment)
- مجموعة المصدر الأبجدية تقابل فراغ العينة (sample space) لتجربة عشوائية منفصلة (discrete) .
- الحرف أو الرمز يقابل الناتج (outcome)
- الكلمة أو الرسالة تقابل الحدث (event) .

وتعرَّف قناة المعلومات أو قناة الاتصال

(communication or information channel)

بأنهـا تتكون من:

(أ) زوج X, Y من المجموعات الأبجدية المحدودة، حيث:

X تسمى مجموعة المصدر الأبجدية source alphabet

Y تسمى مجموعة المخرج الأبجدية output alphabet

(ب) توزيع احتمالي (مصفوفة احتمالية) $Q \equiv P(Y|X)$ على Y ومعرَّف بالنسبة لكل عنصر في المجموعة X

والقناة تقبل أو تستقبل رموزاً من المجموعة X وتعطى عند مخرجها رموزاً من المجموعة Y .

وتسمى هذه القناة عادة قناة متقطعة (discrete channel) حيث كل من مدخلها ومخرجها عبارة عن سلسلة أو مجموعة متتابعة (sequence) من حروف أو رموز من مجموعة أبجدية (alphabet) ، وذلك بعكس القناة المتصلة (continuous channel) .

وإذا كان كل حرف في سلسلة الحروف عند المخرج يعتمد إحصائياً فقط

على الحرف المقابل له بالضبط ـ أي في نفس الموضع من حيث الترتيب ـ في سلسلة الحروف عند المدخل، ويمكن تعيينه عن طريق التوزيع الاحتمالي الثابت $P(Y|X)$ المعرَّف لكل حرف في مجموعة المدخل الأبجدية X وكل حرف في مجموعة المخرج الأبجدية Y ، فإنه يقال للقناة إنها **قناة عديمة الذاكرة** (memoryless channel) ، وذلك بعكس القناة ذات الذاكرة (channel with memory) .

وكل القنوات التي ندرسها في هذا الكتاب هي قنوات متقطعة عديمة الذاكرة (Discrete Memoryless Channels DMC) .

وتسمى المجموعة X مع أي توزيع احتمالي $P \equiv P(X)$ مُعرَّف عليها:
مصدر القناة (channel source)

وإذا لم يكن الاحتمال $p(y|x)$ صفراً أو واحداً بالنسبة لكل زوج (x,y) فإنه يقال إن **القناة ضوضائية** (noisy) .

وبالنسبة لمصفوفات الاحتمالات المختلفة في نظام الاتصال فهي كما يلي:

$P(X)$: مصفوفة احتمالات المصدر
(source probability matrix)

$P(Y)$: مصفوفة احتمالات الاستقبال أو المخرج
(receiver or output probability matrix)

$P(X|Y)$: مصفوفة الاحتمالات الشرطية
(conditional probability matrix)

$P(Y|X)$: مصفوفة احتمالات القناة (أو الاحتمالات الشرطية للقناة)
[channel (conditional) probability matrix]

P(X,Y) : مصفوفة الاحتمالات المشتركة (للمدخل والمخرج)
[joint (input-output) probability matrix]

وعموماً فإن مصفوفة المصدر P(X) ومصفوفة القناة P(Y|X) تكونان معلومتين، ومنهما يمكن الحصول على بقية المصفوفات.

ومن ناحية أخرى فإنه يمكن استنتاج مصفوفة المصدر من مصفوفة الاستقبال ومصفوفة قناة مرغوب فيها.

كذلك هناك توافقات أخرى ممكنة ونلجأ إليها عند الحاجة.

كذلك يلاحظ أنه في حالة التعامل مع بُعدين (2-dimensional case) - وهي الحالة التي معنا الآن - فإن جميع الاحتمالات يمكن استنتاجها من مصفوفة الاحتمالات المشتركة. وبالتالي فإن مصفوفة الاحتمالات المشتركة تحدِّد أو تميِّز وتعيِّن قناة الاتصالات وذلك بصورة مماثلة كما أن مصفوفة المعاوقة (impedance or admittance matrix) تحدد أداء شبكة كهربائية خطية ذات طرفين (linear two-port network) بالنسبة لأطرافها.

وتبعاً لمصفوفات الاحتمالات المذكورة سابقاً فإن مقاييس المعلومات المقابلة لها تكون كما يلي:

H(X) : مقياس معلومات المصدر (source entropy)

وهو عبارة عن القيمة المتوسطة للمعلومات بالنسبة للرمز الواحد عند المصدر.

H(Y) : مقياس معلومات المستقبِل (receiver entropy)

وهو القيمة المتوسطة للمعلومات بالنسبة للرمز الواحد عند المستقبِل.

H(X|Y) : مقياس المفقودات أو الغموض والالتباس (equivocation entropy)

وهو مقياس عدم التأكد بالنسبة للرمز المرسَل، حيث قد عُلِمَ أي الرمـوز y_j قد تم استقباله.

أي أن هذا المقياس هو القيمة المتوسطة لعدم التأكد بالنسبة للرمز المـرسَل، حيث القيمـة المتوسـطة تحسب على كـل الرمـوز المستقبَلة. أو بأسلوب آخـر فإنـه عندما يُستقبَل رمز محدَّد y_j فإنـه قد يكـون نتيجة إرسـال أحد الـرموز x_i بـاحتمال مُعطَى، وتكون القيمة المتوسطة للمعلومات ـ والمـرتبطة بنـظام الاحتمالات هـذا ـ عندما يغطى y_j جميع الرموز المستقبَلة، أي القيمة $\overline{H(X|y_j)}$ هي المقياس $H(X|Y)$ أو مقياس الالتباس، وهو مقياس المعلومـات عن المصدر حيث من المعلوم أنـه قد تم استقبال Y .

$H(Y|X)$: مقياس معلومات القناة، أو مقياس الضوضاء، أو مقياس الخطأ (channel entropy, or noise entropy, or error entropy)

وهو مقياس عدم التأكد بالنسبة للرمز المستقبَـل، حيث قد عُلِمَ أي الـرموز x_i قد تم إرساله.

أي أنه عندما يُرسَل رمز محدَّد x_i فإن أحد الرموز المسموح بها y_j قد يُستقبَل باحتمال مُعطَى. فالقيمة المتوسطة للمعلومات والمرتبطة بهذا النظام للاحتمالات عنـدما يغـطي x_i مجموعـة كل الـرموز المـرسلة، أي القيمـة $\overline{H(Y|x_i)}$ تكـون هي المقياس $H(Y|X)$ وهو مقيـاس المعلومات عن طـرف الاستقبال حيث قـد عُلِم أنه قد تم إرسال X .

$H(X,Y)$: مقياس معلومات النظام (system entropy)

وهو القيمة المتوسطة للمعلومات بالنسبة لأزواج الرموز المرسَلة والمستقبلة.

المقياسان $H(X)$ و $H(Y)$ يدلان على الطبيعة الاحتـمالية لأطـراف الإرسال والاستقبال على الترتيب، والمقياس $H(Y|X)$ يشير الى درجة الضـوضاء أو الخـطأ

في القناة، بينما المقياس $H(X|Y)$ يشير إلى درجة الجودة بالنسبة لإمكانية استخلاص محتويات المدخلات من المخرجات، ولذلك فيطلق عليه مقياس التباس القناة بالنسبة للمصدر أو للاحتمال عند المدخل $p(x)$. ونظراً لأنه يمكن القول بأن الرمز x المرسَل في أي لحظة كان معلوماً تماماً عند مصدر القناة قبل إرساله فيمكننا اعتبار أن $H(X|Y)$ تمثل القيمة المتوسطة للمعلومات المفقودة في القناة أثناء عملية الإرسال.

وبالنسبة لمقياس المعلومات المتبادلة $I(X,Y)$ الذي سبقت الإشارة إليه في الفصل السابق والذي يمكن الحصول عليه باستخدام العلاقة

$$I(X,Y) = H(X) - H(X|Y)$$

فيمكن اعتباره القيمة المتوسطة للمعلومات المستقبلة خلال القناة لكل إرسال، أي القيمة المتوسطة للمعلومات المستقبلة بالنسبة للرمز الواحد المرسَل، وذلك لأن هذا المقياس ـ كما تبين المعادلة السابقة ـ يمثل قيمة المعلومات المطلوبة ـ في المتوسط ـ لتحديد أو معرفة رمز x قبل عملية الإرسال مطروحاً منها القيمة المتوسطة المطلوبة لذلك بعد عملية الإرسال، ولذلك فيطلق على هذا المقياس القيمة المتوسطة للمعلومات المتبادلة (average mutual information) أو المعلومات المرسلة عبر القناة (transinformation of the channel)

ونلاحظ من العلاقة السابقة والعلاقة الأخرى الشبيهة

$$I(X,Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

والتي سبق ذكرها في الفصل السابق، أن مقياس المعلومات المتبادلة كمية غير سالبة، أي أن

$$I(X,Y) \geqslant 0$$

وذلك لأن $H(X|Y) \leqslant H(X), H(Y|X) \leqslant H(Y)$

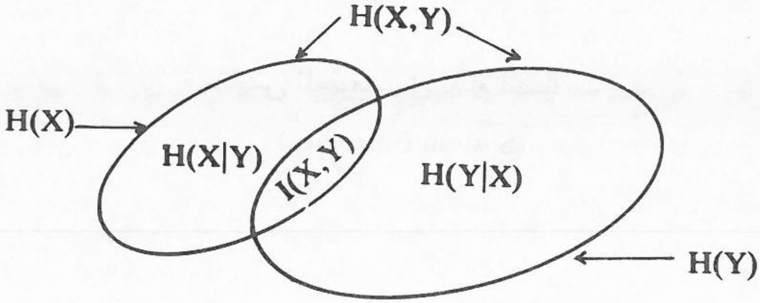
كما عرفنا من خواص مقـاييس المعلومات في الفصـل السابق. بينـما كميات المعلومات المتبادلـة الفرديـة $I(x_i, y_j)$ قد تكـون سالبـة لبعض الأزواج (x_i, y_j) ، وذلك لأن :

$$I(x_i, y_j) = -\log \frac{p(x_i)}{p(x_i|y_j)}$$

وهذه تعطى قيمة سالبة للمقياس $I(x_i, y_j)$ عندما تكون

$$p(x_i) > p(x_i|y_j)$$

ويمكن تمثيل المقاييس المختلفة للمعلومات في نظام اتصالات بالشكل التـالي الذي يعتمد على التمثيل المبني على نظرية المجموعات (set theory)



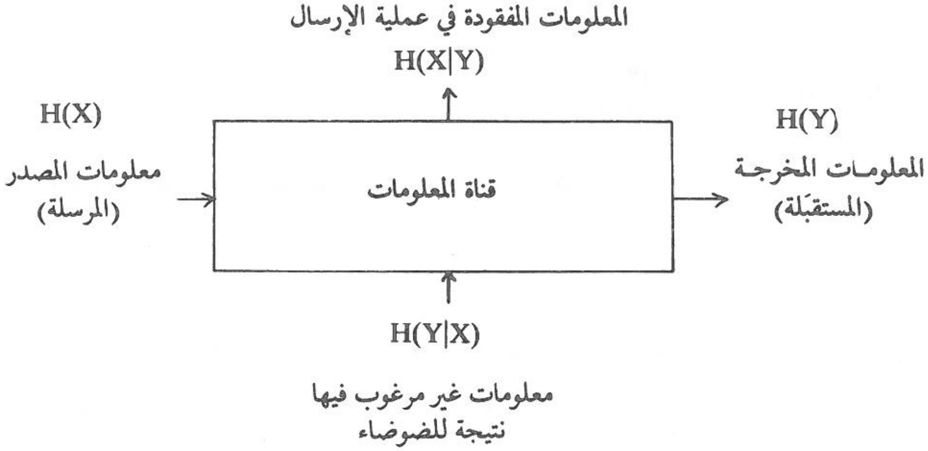
تمثيل مقاييس المعلومات بالمجموعات

ولزيادة الإيضاح نعيد هنا كتابة العلاقات بين هذه المقايينس:

$$\begin{aligned} I(X,Y) &= H(X) - H(X|Y) \\ &= H(Y) - H(Y|X) \\ &= H(X) + H(Y) - H(X,Y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(X,Y) &= H(X) + H(Y|X) \\ &= H(Y) + H(X|Y) \end{aligned}$$

والشكل التالي يوضح العلاقة بين بعض هذه المقاييس للمعلومات وانتقال المعلومات المختلفة عبر القناة.



مقاييس المعلومات في نظام اتصالات

(System Entropies)

سعة القناة، والإطناب، وكفاءة الإرسال
(Channel Capacity, Redundancy, and Transmission Efficiency)

نحتاج في نظم الاتصالات إلى مقياس مناسب لكفاءة إرسال المعلومات وذلك بمقارنة المعدل الفعلي لإرسال المعلومات عبر قناة معطاة وأقصى معدل ممكن لإرسال المعلومات عبر القناة.

تعريف: سعة قناة الاتصال

بالنسبة لقنوات الاتصال المنفصلة (المتقطعة)

(discrete communication channels)

تُعرَّف سعة القناة بأنها الحد الأقصى الذي يمكن أن تصل إليه قيمة المعلومات المتبادلة (mutual information) أو قيمة معدل إرسال المعلومات (rate of information transmission) عبر القناة، وذلك بتغيير احتمالات عناصر مصدر الإرسال.

$$C = \max_{(p_1,\, p_2,\ldots,p_n)} I(X,Y) \qquad \text{bits/symbol}$$

وسعة قناة الاتصال دالة في مصفوفة القناة $P(Y|X)$ وتستخدم سعة القناة كأساس للمقارنة بين نظم الاتصال المختلفة (وبالطبع هناك عوامل أخرى تدخل أيضاً في المقارنة كاعتبارات التكاليف، ودرجة التعقيد في الأجهزة، وحجمها، والقدرة المطلوبة، . . . الخ).

ونلاحظ من تعريف سعة القناة أن

$$\begin{aligned} C &= \max I(X,Y) \\ &= \max [H(X) - H(X|Y)] \\ &\leq \max H(X) \end{aligned}$$

أي أن سعة القناة لا تتجاوز أقصى قيمة لمقياس معلومات المصدر، وهي القيمة التي نصل إليها عندما تكون احتمالات عناصر المصدر كلها متساوية.

وبالنسبة للقناة المنفصلة التي لها خصائص ضوضائية محددة (سابقاً) (pre-specified noise characteristics)، أي لها مصفوفة احتمالات انتقالية معطاة (given transition probability matrix) فإن معدل إرسال المعلومات يعتمد على المصدر الذي يرسل معلوماته عبر القناة. وبالتالي فإن الوصول إلى القيمة العظمى لمعدل إرسال المعلومات يقابل الوصول إلى إحداث توافق أو مواءمة تامة (propre matching) بين المصدر والقناة. وبالتالي فإن تعيين المصدر المثالي يعتمد على الخصائص الانتقالية الاحتمالية للقناة المعطاة.

إذا فرضنا أن سعة القناة هي C وحدة معلومات/رمز (bits/symbol) وأن الزمن اللازم لإرسال الرمز الواحد هو t ثانية (أي أن كل رمز يستغرق t ثانية، وبالتالي يكون عدد الرموز المرسلة في الثانية الواحدة = $\frac{1}{t}$)

فإن سعة القناة تساوي

$$C_t = \frac{1}{t} C \quad \text{bits/second}$$

أي أن سعة القناة يمكن التعبير عنها مقاسة بعدد وحدات المعلومات/ثانية بدلاً من عدد وحدات المعلومات/رمز.

وبنفس الكيفية يمكن التعبير عن معدل إرسال المعلومات مقاساً بعدد وحدات المعلومات/ثانية بدلاً من عدد وحدات المعلومات/رمز أي أن معدل إرسال المعلومات يساوي

$$I_t(X,Y) = \frac{1}{t} I(X,Y) \quad \text{bits/second}$$

تعريف: الاطناب (المطلق) [(absolute) redundancy]

الإطناب في نظام اتصالات هو الفارق بين القيمة العظمى الممكنة والقيمة الفعلية لمعدل إرسال المعلومات، أي أن

الإطناب = سعة القناة − المعلومات المتبادلة

= أقصى معدل إرسال ممكن − المعدل الفعلي للإرسال

$$\begin{aligned} \text{Redundancy} &= C - I(X,Y) \\ &= I_{max}(X,Y) - I_{actual}(X,Y) \end{aligned}$$

وأما الإطناب النسبي (relative redundancy) فهو النسبة بين الإطناب المطلق وسعة القناة. أي أن

الإطناب النسبي = $\dfrac{\text{الإطناب (المطلق)}}{\text{سعة القناة}}$

$$\text{rel. redundancy} = \frac{C - I(X,Y)}{C}$$

$$= 1 - \frac{I(X,Y)}{C}$$

وأما كفاءة الإرسال (transmission efficiency) في نظام اتصالات

فتعرَّف بأنها النسبة بين القيمة الفعلية لمعدل إرسال المعلومات وأقصى قيمة ممكنة لهذا المعدل.

$$\eta \equiv \eta_{\text{transmission}} = \frac{I(X,Y)}{I_{max}(X,Y)} = \frac{I(X,Y)}{C}$$

$$= 1 - \text{rel. redundancy}$$

بعض القنوات الخاصة وسعاتها

من الصعب عموماً إيجاد سعة القناة بالنسبة للقنوات الاختيارية العامة، بينما يسهل إيجاد هذه السعة بالنسبة لبعض القنوات الخاصة. وفيما يلي سنتناول بإذن الله تعالى بعض هذه القنوات الخاصة التي يسهل تحليلها وإيجاد سعتها مع حساب مقاييس المعلومات المختلفة بالنسبة لها، وهي كذلك قنوات مفيدة، وبعضها له أهمية خاصة في التطبيقات العملية.

أما هذه القنوات الخاصة التي سنتناول تحليلها فهي:

١ ـ القناة المثالية.

٢ ـ القناة شديدة الضوضاء كثيرة التداخل.

٣ ـ القناة عديمة الضوضاء.

٤ ـ القناة عديمة المفقودات.

٥ ـ القناة المنتظمة.

٦ ـ القناة الثنائية المتماثلة.

٧ ـ قناة المحو الثنائية.

٨ ـ القناة الثنائية العامة.

أولاً: القناة المثالية (Ideal Channel)

القناة المثالية قناة لا تفقد أياً من معلوماتها في عملية الإرسال والاستقبال

وهي كذلك قناة عديمة الضوضاء، وتتميز بأن كل حرف x_i في المجموعة الأبجدية عند المدخل يكون في تقابل واحد لواحد مع حرف y_i في المجموعة الأبجدية عند المخرج.

$$
\begin{array}{ccc}
x_1 & \xrightarrow{\quad 1 \quad} & y_1 \\
x_2 & \xrightarrow{\quad 1 \quad} & y_2 \\
 & \vdots & \\
x_i & \xrightarrow{\quad 1 \quad} & y_i \\
 & \vdots & \\
x_n & \xrightarrow{\quad 1 \quad} & y_n
\end{array}
$$

المخطط السهمي للقناة المثالية

ويمكن تعريف (القناة المثالية) رياضياً بأنها القناة التي تتميز مصفوفتها بأن أي صف أو أي عمود فيها يحتوي على عنصر واحد فقط غير صفري وبقية العناصر كلها أصفار، وبالتالي فهي مصفوفة قطرية.

$$
Q \equiv P(Y|X) = \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \ddots & & 0 \\
0 & 0 & \ddots & & \vdots \\
 & & & \ddots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

مصفوفة القناة المثالية

نلاحظ أن مصفوفة القناة المثالية Q هي مصفوفة الوحدة $I_{n,n}$ ، أي أن:

$$q_{ij} = \begin{cases} 0 \ \ldots\ldots\ i \neq j & \text{إذا كان} \\ 1 \ \ldots\ldots\ i = j & \text{إذا كان} \end{cases}$$

$$\pi_{ij} = p_i\, q_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \ \text{إذا كان} \\ p_i & i = j \ \text{إذا كان} \end{cases}$$

وبذلك فإن مصفوفة الاحتمالات المشتركة هي:

$$\Pi \equiv P(X, Y) = \begin{pmatrix} p_1 & & & & 0 \\ & p_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & p_i & \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & p_n \end{pmatrix}$$

$$q_j = \sum_i \pi_{ij} \quad \Rightarrow \quad q_j = p_j \quad \forall_j$$

$$H(X) = -\sum_i p_i \log p_i$$

$$H(Y) = -\sum_j q_j \log q_j$$

$$= -\sum_j p_j \log p_j = H(X)$$

$$H(X,Y) = -\sum_{i,j} \pi_{ij} \log \pi_{ij}$$

$$= -\sum_i p_i \log p_i = H(X) = H(Y)$$

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y|X) \quad \Rightarrow \quad H(Y|X) = 0$$

أي أن القناة عديمة الضوضاء

$$H(X,Y) = H(Y) + H(X|Y) \quad \Rightarrow \quad H(X|Y) = 0$$

أي أن القناة عديمة المفقودات

ويمكن إثبات النتيجتين الأخيرتين مباشرة باستخدام القانونين التاليين:

$$H(Y|X) = -\sum_{i,j} \pi_{ij} \log q_{ij} = 0$$

وهذه النتيجة واضحة بمجرد النظر إلى المصفوفتين Q , Π وذلك لأن

$$\log 1 = 0, \qquad 0 \log 0 = 0$$

$$H(X|Y) = -\sum_{i,j} \pi_{ij} \log r_{ij}$$

وبمقارنة العناصر π_{ij} في المصفوفة Π مع العناصر r_{ij} المقابلة لها في المصفوفة R وهي :

$$R \equiv (r_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

نستنتج أن $H(X|Y) = 0$ وذلك لأن

$$\log 1 = 0, \quad 0 \log 0 = 0$$

وبالنسبة للقيمة المتوسطة للمعلومات المتبادلة $I(X,Y)$:

$$I(X,Y) = H(X) - H(X|Y)$$

$$= H(X) - 0 = H(X)$$

ونظراً لأن سعة القناة هي القيمة العظمى التي يمكن أن تصل إليها قيمة المعلومات المتبادلة $I(X,Y)$ فإن :

$$C = \max_{P} I(X,Y)$$

حيث $$P \equiv (p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

$$C = \max_{P} H(X) = \log n$$

وبذلك يمكننا أن نلخص النتائج التي وصلنا إليها بالنسبة للمقاييس المختلفة للمعلومات في حالة القناة المثالية فيما يلي:

عدد المداخل = عدد المخارج، أي أن عدد عناصر المجموعة الأبجدية عند المدخل (n) يساوي عدد عناصر المجموعة الأبجدية عند المخرج (m) ، أي أن

$$n = m$$

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$$

$H(Y|X) = 0$ (عديمة الضوضاء)

$H(X|Y) = 0$ (عديمة المفقودات)

$$H(X,Y) = H(X) = H(Y) = I(X,Y)$$

$$C = \log n \quad \Diamond \quad p_i = \frac{1}{n} ; i = 1, 2, \ldots, n$$

مثال ٢ ـ ١ :

احسب سعة القناة التالية، وأوجد التوزيع الاحتمالي الأمثل الذي يؤدي إلى بلوغ هذه السعة.

$$\begin{array}{c}
x_1 \xrightarrow{\quad\quad 1 \quad\quad} y_1 \\
x_2 \xrightarrow{\quad\quad 1 \quad\quad} y_2 \\
x_3 \xrightarrow{\quad\quad 1 \quad\quad} y_3
\end{array}$$

الحـــل: القناة مثالية، ولذلك

$$C = \log 3 \quad \text{bits/symbol}$$

$$p_i = \frac{1}{n} = \frac{1}{3}$$

$$P_{opt.} = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\}$$

ثانياً: القناة شديدة الضوضاء كثيرة التداخل
(Completely Noisy, Completely Lossy Channel)

في هذه القناة لا توجد علاقة رابطة بين رموز المدخـل ورموز المخـرج، أي أنهما مستقـلان عن بعضيهما البعض، بمعنى أنـه إذا أُرسِل الحـرف x_i عند المـدخل فقد يُستقبَل كأي واحد من الرموز y_j من المجموعة الأبجديـة عند جهة الاستقبال وبنفس الاحتمال، أي أن

$$p(y_1|x_i) = p(y_2|x_i) = \dots = p(y_j|x_i) = \dots = p(y_m|x_i)$$

$$\Rightarrow q_{i1} = q_{i2} = \dots = q_{ij} = \dots = q_{im}$$

$$= \frac{1}{m}$$

وذلك لأن $\sum_{j=1}^{m} q_{ij} = 1$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{m} & \frac{1}{m} & \dots & \frac{1}{m} \\ \frac{1}{m} & \frac{1}{m} & \dots & \frac{1}{m} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{1}{m} & \frac{1}{m} & \dots & \frac{1}{m} \end{pmatrix}_{n \times m}$$

$$= \frac{1}{m} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n \times m}$$

$$\pi_{ij} = p_i\, q_{ij} = \frac{1}{m} p_i \quad \Rightarrow$$

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{p_1}{m} & \frac{p_1}{m} & \dots & \frac{p_1}{m} \\ \frac{p_2}{m} & \frac{p_2}{m} & \dots & \frac{p_2}{m} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{p_n}{m} & \frac{p_n}{m} & \dots & \frac{p_n}{m} \end{pmatrix}_{n \times m} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} p_1 & p_1 & \dots & p_1 \\ p_2 & p_2 & \dots & p_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ p_n & p_n & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

$$q_j = \sum_i \pi_{ij} = \sum_i \frac{1}{m} p_i = \frac{1}{m}$$

ونلاحظ أن هذه القيمة تبيِّن استقلالية المخرج عن المدخل، حيث أن:

$$q_{ij} = q_j \left(= \frac{1}{m} \right)$$

أي أن:

$$p(y_j|x_i) = p(y_j)$$

أو لأن:

$$p(x_i, y_j) = p(x_i) \cdot p(y_j) \left(= p_i \cdot \frac{1}{m} \right)$$

والآن يمكننا إيجاد قيم المقاييس المختلفة للمعلومات لهذه القناة:

$$\begin{aligned}
H(X) &= -\sum_i p_i \log p_i \\
H(Y) &= -\sum_j q_j \log q_j = \log m \\
H(X,Y) &= -\sum_{i,j} \pi_{ij} \log \pi_{ij} \\
&= -\sum_{i,j} \frac{p_i}{m} \log \frac{p_i}{m} \\
&= -m \sum_i \frac{p_i}{m} \log \frac{p_i}{m} \\
&= -\sum_i p_i \log p_i + \log m \\
&= H(X) + H(Y)
\end{aligned}$$

ومن هذه النتيجة نستنتج أن:

$$H(Y|X) = H(Y), \quad H(X|Y) = H(X)$$

وذلك لأن

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y|X)$$
$$= H(Y) + H(X|Y)$$

وأما قيمة المعلومات المتبادلة فهي:

$$I(X,Y) = H(X) - H(X|Y) = 0$$

أي أن هذه القناة التي تحقق شرط الاستقلال بين المدخل والمخـرج لا تنقل أي معلومات على الإطلاق، وبالتالي فإن سعتها تساوي صفـراً. [يُلاحظ أن مثـل هذه القناة التي يحدث فيها أكبر قدر من الفقدان الداخلي للمعلومات تشبه الشبكة الكهـربـائيـة المقـاومـة (resistive electric network) ، بعكس القنـاة عديمة الضوضاء - والتي سندرسها بإذن الله بعد القناة الحالية مباشرة - فإنها تشبه الشبكة الكهربائية عديمة الفقدان (lossless electric network)]

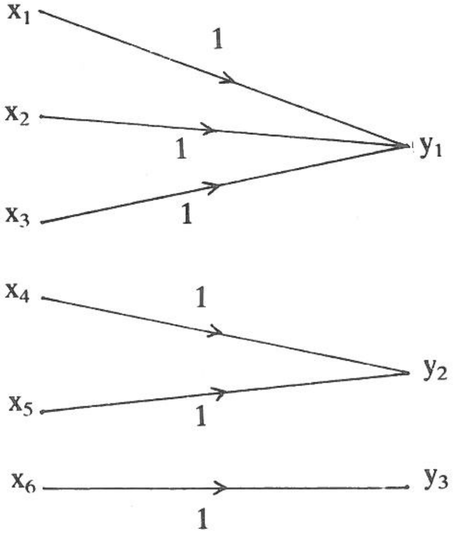
وبالتالي فيمكننا أن نلخص نتائج مقاييس المعلومات للقناة الحالية فيما يلي:

$$H(Y|X) = H(Y)$$
$$H(X|Y) = H(X)$$
$$I(X,Y) = 0 = C$$
$$H(X,Y) = H(X) + H(Y)$$

ثالثاً: القناة عديمة الضوضاء (Noiseless Channel)

تُعرَّف هذه القناة بأنها القناة التي تتميَّز مصفوفتها بأن عناصر أي صف كلها أصفار ما عدا عنصر واحد فقط.

وكمثال على هذا النوع من القنوات ففيما يلي مصفوفة القناة والمخطط السهمي لقناة عديمة الضوضاء.



المخطط السهمي للقناة

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

مصفوفة القناة

من الواضح أن هذا العنصر الواحد الذي لا يساوي صفراً في أي صف في مصفوفة القناة عديمة الضوضاء يجب أن يساوي الوحدة وذلك لأن كل صف يمثل جميع المخرجات المحتملة لمُدْخل معينً معطًى، ونعلم أن مُخرجاً واحداً ما يجب أن ينتج.

من مصفوفة القناة عديمة الضوضاء يمكننا أن نستنتج أن

$$H(Y|X) \equiv - \sum \pi_{ij} \log q_{ij} = 0$$

وذلك لأن q_{ij} تساوي إما صفراً وإما واحداً ونعلم أن

$$\log 1 = 0, \quad 0 \log 0 = 0.$$

وبالتالي فإن قيمة المعلومات المتبادلة هي :

$$I(X,Y) = H(Y)$$

ومن هذه العلاقة نستنتج قيمة سعة القناة عديمة الضوضاء.

$$C \equiv \max_{P} I(X,Y) = \max_{P} H(Y) = \log m$$

حيث m هو عدد رموز المخرج.

وتبلغ القناة سعتها عندما تصل H(Y) إلى قيمتها العظمى (log m) أي عندما تتساوى احتمالات حدوث رموز المخرج كلها، أي عندما

$$q_j = \frac{1}{m}\,; \qquad j = 1, 2, \ldots, m$$

ومن هذه العلاقات ومن احتمالات مصفوفة القناة يمكننا حساب الاحتمالات المطلوبة لرموز المصدر كي تبلغ القناة سعتها.

(ملاحظة: يمكن باستخدام الشفرات - والتي ستدرس بإذن الله في الفصل التالي - تحويل مصدر معين احتمالات عناصره محددة من قبل إلى مصدر مُشفَّرٍ له الاحتمالات المطلوبة مع الاحتفاظ بقيمة الكفاءة).

ويمكننا تلخيص نتائج مقاييس القناة عديمة الضوضاء فيما يلي:

$$H(Y|X) = 0$$

$$I(X,Y) = H(Y)$$

$$C = \max H(Y) = \log m \Rightarrow q_j = \frac{1}{m}\ \forall_j$$

مثال ٢ ـ ٢ :

احسب سعة القناة التالية عديمة الضوضاء واحسب كذلك الاحتمالات المطلوبة لعناصر المصدر كي تبلغ القناة سعتها .

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

الحـــل : في هذه القناة :

$n = 6, \qquad m = 3$

$C = \log m = \log 3 \quad$ bits/symbol

$$q_i = \frac{1}{m} = \frac{1}{3} \qquad j = 1, 2, 3$$

$$\Pi = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ p_2 & 0 & 0 \\ p_3 & 0 & 0 \\ 0 & p_4 & 0 \\ 0 & p_5 & 0 \\ 0 & 0 & p_6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad p_1 + p_2 + p_3 = \tfrac{1}{3}$$

$$p_4 + p_5 = \tfrac{1}{3}$$

$$p_6 = \tfrac{1}{3}$$

$$\Rightarrow P\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \frac{1}{3} - \alpha - \beta \\ \gamma \\ \frac{1}{3} - \gamma \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

حيث α, β, γ ثوابت اختيارية تحقق الشروط

$$0 \leq \alpha + \beta \leq \frac{1}{3}$$

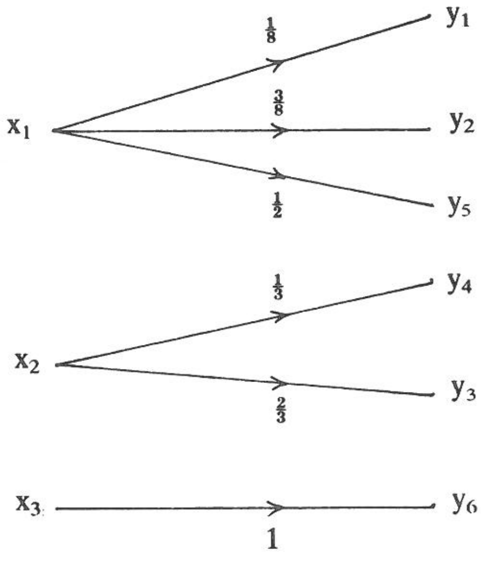
$$0 \leq \gamma \leq \frac{1}{3}$$

رابعاً: القناة عديمة المفقودات (Lossless Channel)

تعريف:

في مصفوفة هذه القناة عناصر أي عمود كلها أصفار باستثناء عنصر واحد فقط لا يساوي صفراً.

فمثلاً القناة التالية المعرَّفة بمصفوفة القناة أو بالمخطط السهمي قناة عديمة المفقودات.



المخطط السهمي للقناة

مصفوفة القناة

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\
\hline
\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} & \multicolumn{6}{c}{\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}
\end{array}
$$

يتضح لنا من شكل مصفوفة القناة أو المخطط السهمي لهذه القناة ـ والتي ضربناها مثلاً للقناة عديمة المفقودات ـ أنه بالنسبة لأي رمز y_j يتم استقباله يمكن أن نحدد بالضبط وبتأكيد تام أي عنصر x_i قد تم إرساله، وبالتالي فإن:

$p(x_i|y_j) = 1$ أو $p(x_i|y_j) = 0$

في كل حالة. . وبناءاً على ذلك فإنه بالنسبة للقناة عديمة المفقودات:

$$H(X|Y) = 0$$

$$I(X,Y) = H(X)$$

$$C = \max H(X) = \log n$$

حيث n هو عدد عناصر المصدر.

ويمكن أيضاً الوصول إلى هذه النتائج باللجوء إلى مصفوفات الاحتمالات المشتركة والاحتمالات الشرطية، فمثلاً بالنسبة للقناة المعرفة سابقاً بمصفوفتها أو مخططها السهمي:

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{p_1}{8} & \frac{3}{8}p_1 & 0 & 0 & \frac{p_1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}p_2 & \frac{1}{3}p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix}$$

$$q_1 = \frac{p_1}{8}, \; q_2 = \frac{3}{8}p_1, \; q_3 = \frac{2}{3}p_2, \; q_4 = \frac{1}{3}p_2, \; q_5 = \frac{p_1}{2}, \; q_6 = p_3$$

$$R \equiv P(X|Y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H(X|Y) = -\sum \pi_{ij} \log r_{ij} = 0$$

(لأن : $0 \log 0 = 0$, $\log 1 = 0$)

ثم نحصل على قيمة المعلومات المتبادلة وسعة القناة كما سبق.

ملاحظات:

(١) بالنسبة للقناة عديمة المفقودات بدأنا بتعريف مصفوفتها، ثم استنتجنا أن قيمة المقياس $H(X|Y)$ تساوي صفراً. ويمكننا كذلك إذا بدأنا بالشرط $H(X|Y) = 0$ أن نستنتج شكل مصفوفة القناة كما يلي:

$$H(X|Y) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$-\sum_{i,j} \pi_{ij} \log r_{ij} = 0$$

وحيث أن مجموع مقادير غير سالبة لا يساوي صفراً إلا إذا ساوت كل قيمة صفراً، لذلك فإن:

$$\pi_{ij} \log r_{ij} = 0 \qquad \forall\, i, j$$

$$\Rightarrow p(y_j).\, p(x_i|y_j) \log p(x_i|y_j) = 0 \qquad \forall\, i, j$$

فإذا تحقق أنه لبعض قيم j كانت $p(y_j) \neq 0$ ، فإن:

$$p(x_i|y_j)\, .\, \log p(x_i|y_j) = 0 \qquad \forall\, i$$

فإذا تحقق أنه لبعض قيم i كانت $p(x_i|y_j) \neq 0$ فإن

$$\log p\ (x_i \mid y_j) = 0$$
$$\Rightarrow p(x_i \mid y_j) = 1$$

أي أن النتيجة التي وصلنا هي أنه إذا كان $p(y_j) \neq 0$

فإن $p(x_i|y_j) = 0 \quad \text{or} \quad 1$

أي أن شرط القناة عديمة المفقودات (أي شرط انعدام الالتباس : equivocation = 0) هو أن كل عنصر y يُستقبل (باحتمال ≠ صفر) يحدد تماماً العنصر x الذي أُرسل.

(٢) واضح من تعريفات (وكذلك من نتائج دراسة) القنوات السابقة أن القناة المثالية قناة عديمة الضوضاء وعديمة المفقودات.

(٣) قناة المعلومات قد تكون عديمة المفقودات ولكنها ضوضائية، كما في المثال التالي.

مثال ٢ ـ ٣: نفرض أن

$$X = \{x_1, x_2\}\ ,\ Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$$

$$p(y_1|x_1) = p(y_2|x_1) = \frac{1}{2}$$

$$p(y_3|x_2) = p(y_4|x_2) = \frac{1}{2}$$

$$p(x_1) = p(x_2) = \frac{1}{2}$$

اثبت أن القناة المعرَّفة بالزوج X, Y والاحتمالات الشرطية المعطاة هي قناة

ضوضائية، إلا أن الالتباس فيها يتلاشى أي تنعدم المفقودات بالتوزيع الاحتمالي - المُعطى - عند المدخل $\{p_1, p_2\}$، وأن معدل الإرسال فيها هو وحدة معلومات لكل إرسال.

الحـل:

واضح أن القناة ضوضائية لأن الاحتمال $p(y_j|x_i)$ لا يساوي صفراً أو واحداً لجميع الازواج (x_i, y_j)، فمثلاً $p(y_1|x_1) = 0.5$. ومن الممكن أيضاً أن نثبت أن $H(Y|X) \neq 0$ (أي أن الضوضاء لا تنعدم).

$$Q \equiv \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$\Pi \equiv \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & \pi_{14} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} & \pi_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix}$$

$$H(Y|X) = -4 \times 0.25 \log 0.5 = 1 \neq 0$$

القناة ضوضائية ◁

$$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 0.25$$

$$R \equiv P(X|Y) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H(X|Y) = -\sum_{i,j} \pi_{ij} \log r_{ij} = 0$$

وكان من الممكن كتابة هذه النتيجة مباشرة لأن القناة من شكل مصفوفتها Q قناة عديمة المفقودات. وبالنسبة لمعدل الإرسال فهو

$$\text{Rate} \equiv I(X,Y) = H(X)$$

$$= -\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} = 1 \qquad \text{bit/transmission}$$

خامساً: القناة المنتظمة (Uniform Channel)

تعريـف:

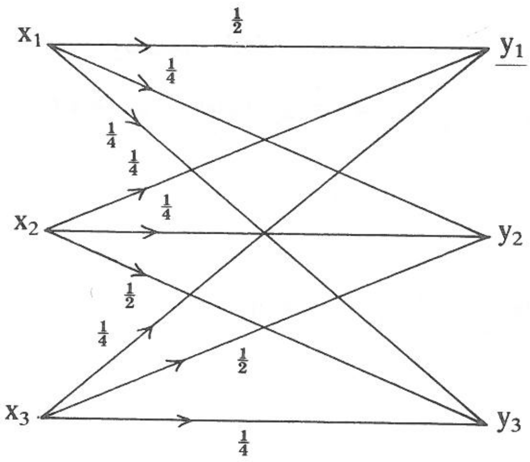
في مصفوفة القناة المنتظمة كل الصفوف متطابقة ما عدا ترتيب العناصر وكل الأعمدة متطابقة ما عدا ترتيب العناصر.

أي أن أي صف له نفس العناصر ولكن الترتيب قد يختلف.

وأي عمود له نفس العناصر ولكن الترتيب قد يختلف

وإذا كانت المصفوفة مربعة فإن أي صف أو أي عمود له نفس العناصر ولكن الترتيب قد يختلف.

مثلاً القناة التالية قناة منتظمة ذات ثلاثة مداخل وثلاثة مخارج، ولذلك فمصفوفتها مصفوفة مربعة ٣ × ٣، يتكون أي صف فيها أو أي عمود من الثلاثة عناصر $\frac{١}{٢}$، $\frac{١}{٤}$، $\frac{١}{٤}$.



المخطط السهمي للقناة

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

مصفوفة القناة

في الخطوات التالية نحسب سعة هذه القناة.

$$C = \max I(X,Y)$$

$$I(X,Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

$$H(Y) = -\sum_{j} q_j \log q_j$$

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= -\sum_{i,j} \pi_{ij} \log q_{ij} \\ &= -\sum_{i,j} p_i q_{ij} \log q_{ij} \\ &= -\sum_{i} p_i \sum_{j} q_{ij} \log q_{ij} \end{aligned}$$

ونظراً لأن جميع صفوف المصفوفة $Q \equiv (q_{ij})$ متطابقة (فيما عدا ترتيب العناصر الذي قد يختلف من صف لآخر)، فان المجموع

$$\sum_{j} q_{ij} \log q_{ij}$$

لا يعتمد على i (أي لا يعتمد على رقم الصف، بل هو ثابت بالنسبة لجميع الصفوف، ويساوي مجموع حواصل ضرب كل عنصر في الصف في لوغاريتمه)، ولذلك فيمكننا أن نكتب

$$H(Y|X) = -\sum_j q_{ij} \log q_{ij} \sum_i p_i$$

$$= -\sum_j q_{ij} \log q_{ij}$$ (لأي قيمة من قيم i)

أي أن المقدار $H(Y|X)$ ثابت بالنسبة للاحتمالات عند المدخل، ويعتمد فقط على مصفوفة القناة المعطاة.

$$I(X,Y) = H(Y) + \underbrace{\sum_j q_{ij} \log q_{ij}}_{\text{ثابت}}$$

$$C = \max I(X,Y) = \log m + \sum_j q_{ij} \log q_{ij}$$

وذلك لأن المعلومات المتبادلة $I(X,Y)$ تصل إلى قيمتها العظمى حينما تبلغ $H(Y)$ قيمتها العظمى (لأن الحد الثاني ثابت)، وهذا يحدث حينما تكون جميع رموز المخرج متساوية الاحتمالات.

ملاحظة: عموماً ـ بالنسبة لأي قناة ـ ليس من الضروري وجود توزيع احتمالي على رموز المدخل بحيث يؤدي إلى أن تكون جميع رموز المخرج متساوية الاحتمالات، ولكن بالنسبة للقناة المنتظمة معلوم أن رموز المدخل متساوية الاحتمالات تؤدي إلى رموز متساوية الاحتمالات عند المخرج [انظر الجزء (٢) من المسألة رقم ٢ ـ ١٢].

مثال ٢ ـ ٤ :

أحسب سعة القناة المنتظمة السابقة (المعرّفة بالمصفوفة المربعة ٣×٣) .

الحـــل :

$$C = \log m + \sum_{j} q_{ij} \log q_{ij}$$

(لأي قيمة من قيم i)

$$= \log 3 + \left(\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \log \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \log \frac{1}{4} \right)$$

$$= \log 3 - 1.5$$

$$= 0.0849 \qquad \text{bits/symbol}$$

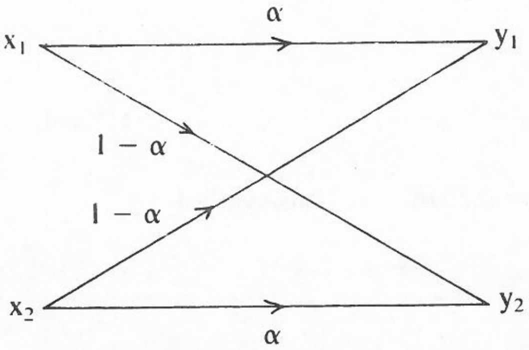
سادساً : القناة الثنائية المتماثلة

(Binary Symmetric Channel BSC)

تعرَّف هذه القناة بالمصفوفة التالية أو بالمخطط السهمي التالي، حيث α أي عدد حقيقي يحقق الشرط $0 \le \alpha \le 1$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix}$$

مصفوفة القناة



المخطط السهمي للقناة

حيث أن القناة الثنائية المتماثلة (BSC) قناة منتظمة، فيمكن حساب سعتها بالقانون التالي:

$$C = \log m + \sum_j q_{ij} \log q_{ij}$$

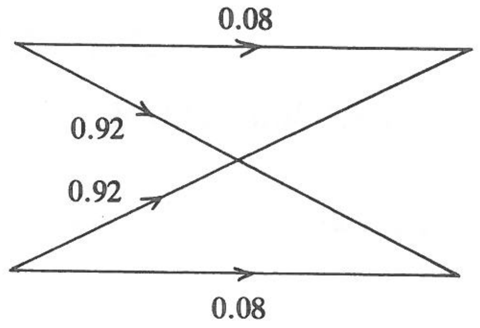
$$= \log 2 + \alpha \log \alpha + (1-\alpha) \log (1-\alpha)$$

$$= 1 + \alpha \log \alpha + (1-\alpha) \log (1-\alpha)$$

$$\equiv 1 - H(\alpha)$$

مثال ٢ ـ ٥ :

احسب سعة القناة الثنائية المتماثلة التالية :



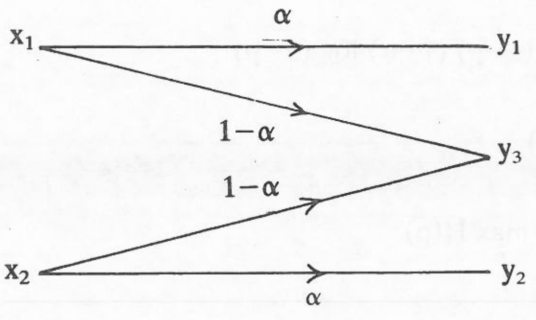
الحــل:

$$C = 1 - H(0.08) = 1 - 0.4022 = 0.5978 \quad \text{bits/symbol}$$

سابعاً: قناة المحو الثنائية

(Binary Erasure Channel BEC)

تعرَّف قناة المحو الثنائية بالمصفوفة التالية أو المخـطط السهمي التالي. وهي قناة لها رمزان عند المدخل وثلاثة رموز عند المخرج. وأحد رموز المخرج (z) يشـير إلى أن العنصر المخرج (output) قد مُحِي ولا يمكننا أن نحدد بالضبط العنصر الذي أُرسِل، هل هو x_1 أم x_2 . أي أن رمز المخرج z يستعمل لاكتشاف خطأ في عملية الارسال (قناة المحو الثنـائية BEC هي قنـاة لتصحيح الاخـطاء الاحاديـة، وسنتناول هذا الموضوع بإذن الله في الفصل القادم عند دراسة الشفرات) .



$$(\equiv Z)\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1-\alpha \\ 0 & \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

المخطط السهمي للقناة

مصفوفة القناة

والآن نوجد سعة هذه القناة.

$$C = \max I(X,Y)$$

$$I(X,Y) = H(X) - H(X|Y)$$

نفرض أن

$$p(x_1) \equiv p_1 = p$$

ولذلك فإن

$$p(x_2) = 1 - p$$

$$H(X) = -p \log p - (1-p)\log(1-p) \equiv H(p)$$

$$H(X|Y) = -\sum_{i,j} \pi_{ij} \log r_{ij}$$

$$\Pi = \begin{pmatrix} p\,\alpha & 0 & p(1-\alpha) \\ 0 & (1-p)\,\alpha & (1-p)\,(1-\alpha) \end{pmatrix}$$

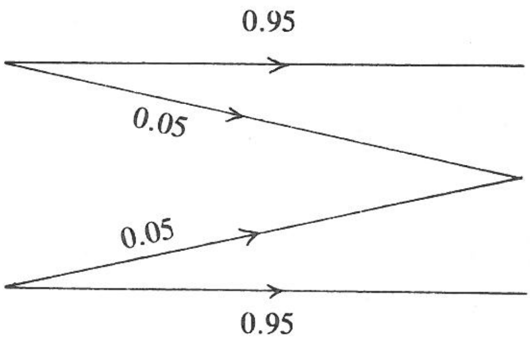
$$q_1 = p\,\alpha, \qquad q_2 = (1-p)\,\alpha, \qquad q_3 = 1-\alpha$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & 1-p \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} H(X|Y) &= -\,p\,(1-\alpha)\log p - (1-p)\,(1-\alpha)\log(1-p) \\ &= (1-\alpha)\,H(p) \\ I(X,Y) &= H(p) - (1-\alpha)\,H(p) \\ &= \alpha\,H(p) \\ C &= \max_p\,[\alpha\,H(p)] = \alpha \,.\, \max_p H(p) \\ &= \alpha \,.\, 1 = \alpha \end{aligned}$$

مثال ٢ ـ ٦ :

أوجد سعة قناة المحو الثنائية التالية :



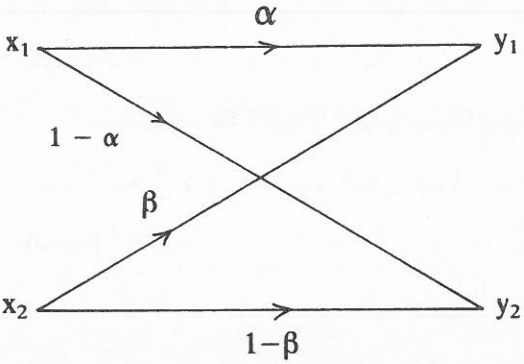
الحـــل :

$C = \alpha = 0.95$ bits/symbol

ثامناً : القناة الثنائية العامة

(General Binary Channel GBC)

تُعرَّف القناة الثنائية العامة بالمصفوفة التالية أو المخطط السهمي التالي.



$$\begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

المخطط السهمي للقناة   مصفوفة القناة

للحصول على سعة هذه القناة فإننا كالمعتاد نوجد أولاً تعبيراً لقيمة المعلومات المتبادلة $I(X,Y)$ ثم نوجد قيمته العظمى. ونظراً لأن التعبير في حالة هذه القناة العامة ليس تعبيراً بسيطاً يسهل إيجاد قيمته العظمى بل هو دالة معقدة في المجهولين α, β وإيجاد نهايتها العظمى يتطلب إجراء عدة عمليات رياضية على حدود كثيرة فإننا نعطي هنا النتيجة النهائية، أي التعبير الخاص بسعة القناة والتوزيع الاحتمالي عند المدخل والذي يؤدي إلى بلوغ هذه السعة.

$$C = \frac{\alpha\, H(\beta) - \beta\, H(\alpha)}{\beta - \alpha} + \log\left[\, 1 + 2^{\frac{H(\alpha) - H(\beta)}{\beta - \alpha}} \,\right]$$

حيث

$$H(\alpha) = -\,\alpha \log \alpha - (1-\alpha)\log(1-\alpha)$$

وأما التوزيع الاحتمالي عند المدخل والذي يؤدي الى الوصول إلى هذه السعة فهو

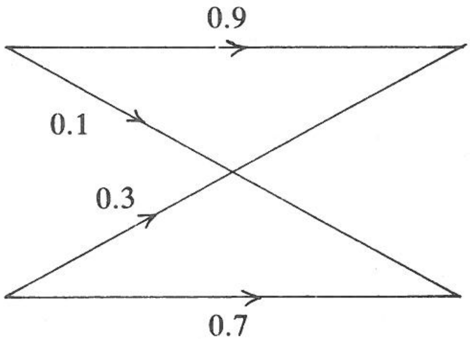
$$P_{max} = \{p, 1 - p\}$$

حيث

$$p = \frac{1}{\beta - \alpha}\left[\beta - \frac{1}{1 + 2^{\frac{H(\beta) - H(\alpha)}{\beta - \alpha}}}\right]$$

مثال ٢ ـ ٧:

احسب سعة القناة الثنائية العامة التالية، وأوجد التوزيـع الاحتمالي الأمثـل عنـد المدخـل (أي التوزيـع الذي يجعـل قيمة المعلومـات المتبـادلـة تسـاوي هـذه السعة).



الحـل:

في هذه القناة الثنائية العامة:

$$\alpha = 0.9, \qquad \beta = 0.3$$

وبتعويض هذه القيم في تعبيري السعة والتـوزيع الاحتـمالي الأمثل نحصـل على:

$$C = 0.2967 \qquad \text{bits/symbol}$$

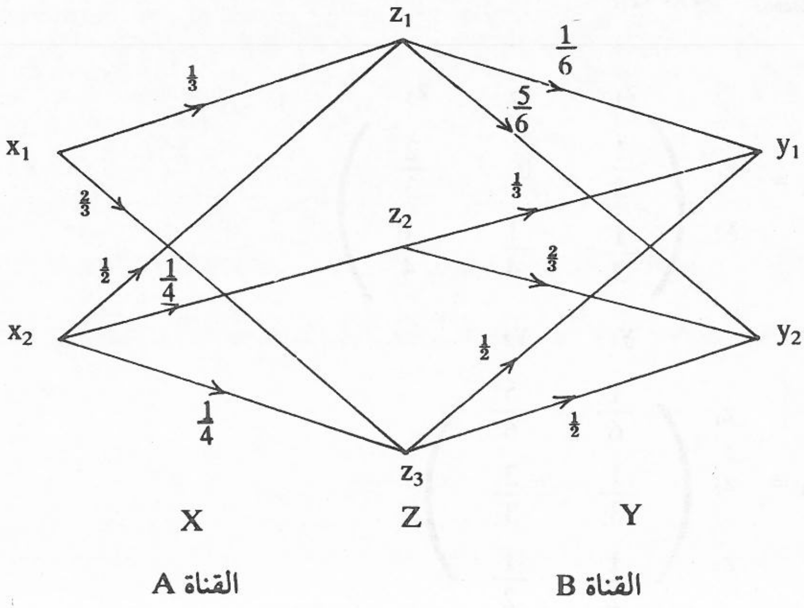
$$P_{max} = \{0.5281, 0.4719\}$$

القنـــوات المتتابعـــة
(أو القنوات المتصلة على التوالي)

(Cascaded Channels, or Channels in Series)

إذا وُصِّلت مخارج قناة ما بمداخل قناة أخرى فإنه يقال إن القناتين متصلتـان على التوالي أو إن القناتين متتابعتان .

فمثـلاً في الشكـل التـالي وُصِّلت المخـارج الثـلاثـة (z_1, z_2, z_3) للقنـاة A بالمداخل الثلاثة المقابلة لها في القناة B . ولذلك فإن القناتين A, B متصلتان عـلى التوالي وتكافئان قناة واحدة (مركَّبة) لها المدخلان x_1, x_2 والمخرجان y_1, y_2 .



وللحصول على هذه القناة (الثنائية) المركبة المكافئة للقناتين على التوالي، نوجد مصفوفتها أو مخططها السهمي، أي نوجد الاحتمالات المشروطة لمخرجيها y_1, y_2 بالنسبة لمدخليها x_1, x_2 .

فمثلاً لإيجاد $p(y_1|x_1)$، نلاحظ أنه يمكننا الوصول من x_1 إلى y_1 إما عن طريق z_1 أو عن طريق z_3 (ولا يوجد مسار عن طريق z_2) ولذلك فإن:

$$
\begin{aligned}
p(y_1|x_1) &= p(z_1|x_1) \,.\, p(y_1|z_1) + p(z_3|x_1) \,.\, p(y_1|z_3) \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{18}
\end{aligned}
$$

وبالمثل يمكن الحصول على بقية الاحتمالات المشروطة في مصفوفة القناة. ويلاحظ أنه يمكن الحصول مباشرة على هذه المصفوفة للقناة المركبة بضرب مصفوفتي القناتين المكونتين لها وذلك بنفس ترتيب القناتين كما يلي:

$$Q_{cascade} = Q_A . Q_B$$

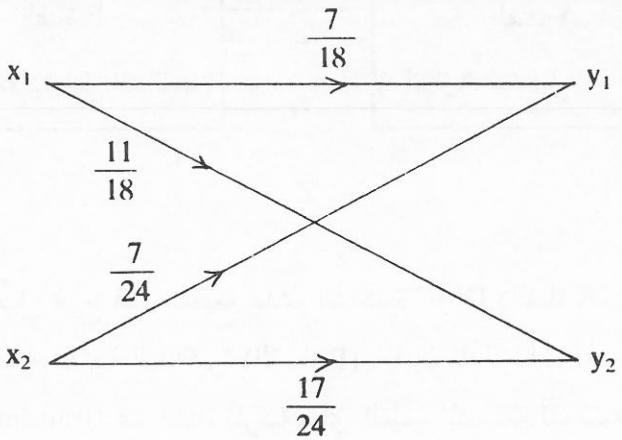
$$
Q_A = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\
\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
Q_B = \begin{array}{c} \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} \\
\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$Q_{cascade} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}_{2\times 3} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

$$= \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{7}{18} & \frac{11}{18} \\ \frac{7}{24} & \frac{17}{24} \end{pmatrix}_{2\times 2} \end{array}$$

وبذلك يكون المخطط السهمي للقناة المركبة كما يلي:

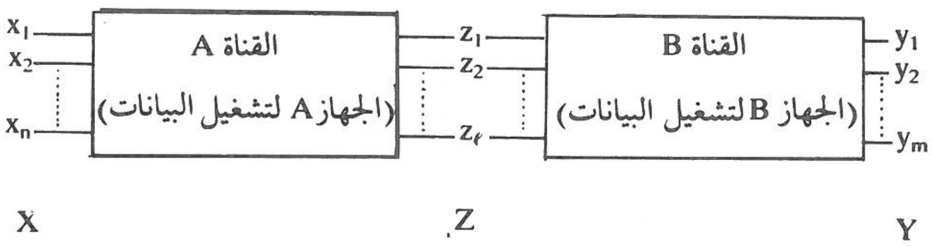


ومن الناحية العملية نحتاج أحياناً إلى توصيل القنوات على التوالي كما في حالة الاتصال عبر مسافات طويلة حيث يلزم أحياناً توصيل عدة قنوات على التتابع عن طريق محطات تكرارية (repeater stations) للتقوية، وذلك لضمان

جودة الإرسال حيث تقوم هذه المحطات التكرارية بتكرار أو نسخ المعلومات عند مخرج إحدى القنوات ولكن بعد تقويتها أي تكبيرها ورفع مستواها وذلك للتخفيف من آثار الضوضاء في القناة التالية.

وعموماً فإن قيمة المعلومات المتبادلة بين مدخل القناة المركبة ومخرجها لا تزيد عن قيمة المعلومات المتبادلة بين مدخل ومخرج أي من القنوات المتتابعة الداخلة في تركيبها، حيث تتعرض المعلومات التي تفيض عبر هذه القنوات لتأثيرات الضوضاء والفقدان. ويمكن أن تصاغ هذه الحقيقة في النظرية التالية.

نظرية القنوات المتتابعة أو نظرية تشغيل البيانات
(Cascaded Channels / Data Processing Theorem)



إذا وُصِّل مخرج قناة متقطعة عديمة الذاكرة DMC (القناة A) بمدخل قناة أخرى متقطعة عديمة الذاكرة (القناة B)، فإن المعلومات المرسلة I(X,Y) (transinformation) عبر القناة المركبة، أي القيمة المتوسطة للمعلومات المتبادلة بين أول مدخل X وآخر مخرج Y لا يمكن أن تزيد عن المعلومات المرسلة عبر أي من القناتين على حدة، أي أن:

$$I(X,Y) \leqslant I(X,Z) \quad \& \quad I(X,Y) \leqslant I(Z,Y)$$

نتيجـــة :

نظراً لأن السعة هي القيمة القصوى للمعلومات المتبادلـة، فإن سعـة القناة المكافئة لمجموعة قنوات متصلة على التوالي لا تزيد عن سعة أي من هـذه القنوات المتتابعة على حدة.

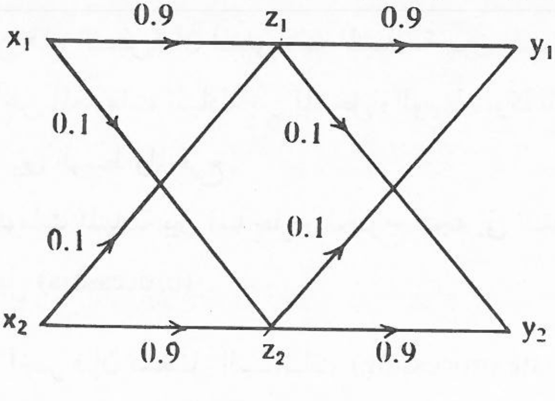
مثال ٢ ـ ٨ :

(i) أوجد سعة القناة الثنائية المتماثلة BSC التالية

$$\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$$

(ii) نفرض أن هذه القناة قد وصلت على التوالي بقناة أخرى BSC مماثلة لها تماماً، كما بالشكل التالي.

أوجد مصفوفة القناة المكافئة $P(Y|X)$ ، وسعتها، وقارن هذه السعة بسعة كل من القناتين على حدة.



الحـــل:

$$\text{(i) } C = 1 - H(\alpha) = 1 - H(0.9) = 1 - H(0.1)$$

$$= 1 - 0.469 = 0.531 \quad \text{bits/symbol}$$

(ii) $P(Y|X) = P(Z|X) \,.\, P(Y|Z)$

$$= \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.82 & 0.18 \\ 0.18 & 0.82 \end{pmatrix}$$

أي أن القناة المكافئة للقناتين على التوالي هي قناة ثنائية متماثلة BSC حيث
$\alpha = 0.82$

$$C_{cascade} = 1 - H(0.82) = 1 - H(0.18)$$

$$= 1 - 0.6801 = 0.3199 \quad \text{bits/symbol}$$

$$\Rightarrow \quad C_{cascade} < C$$

أي أن سعة القناة المكافئة أقل من سعة أي من القناتين على حدة، كما هو متوقع.

ملاحظـة:

يلاحظ من هذه النظرية أن المعلومات المتبادلة بين المدخل والمخرج (النهائي) لا تزيد عن المعلومات المتبادلة بين المدخل والوسط، وكذلك لا تزيد عن المعلومات المتبادلة بين الوسط والمخرج.

أي أن المعلومات المتبادلة بين المدخل والمخرج تتجه إلى النقصان كلما زاد عدد أجهزة التشغيل (processors).

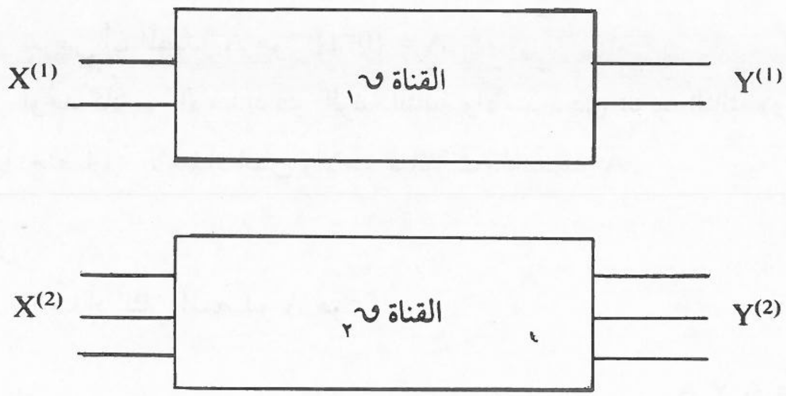
وبأسلوب آخر فإن تشغيل البيانات (date processing) قد ينقل المعلومات من صورة إلى صورة أخرى أكثر فائدة ولكنه لا يمكن أن ينشىء أو يوجد معلومات جديدة، وفي الحقيقة قد يقلل من كمية المعلومات المتوفرة قبل التشغيل.
مثلاً: تَذَكُّر مجموعة من الأعداد بمتوسطها الحسابي (arith. mean) وتشتتها

القيـاسي (standard deviation) قـد يكــون سهـلاً بـالنسبـة للذاكــرة، ولكن المعلومات في المجموعة الأصلية قد فُقِدَت بعملية الاختزال الى عددين فقط.

القنوات المتصلة على التوازي

(Channels in Parallel)

قـد يكون متـوفـراً لـدى المستخدِم أكـثر من قنـاة واحـدة لغـرض إرسـال المعلومات، فمثلاً (انظر الشكل التالي) يمكنه أن يقرر إرسال عدد من الحروف من $X^{(1)}$ عبر القناة ق١ ثم عدة حروف من $X^{(2)}$ عبر القناة ق٢ ، أو يمكنه أن يختار إحدى القناتين عند إرسال كل حرف. يقال للقناتين ق١ ، ق٢ إنهما متصلتان على التوازي.



ومن الممكن أن تكـون هناك عـدة قنوات متصلة عـلى التـوازي ـ بـدلاً من قناتين فقط ـ بحيث يمكن إرسال المعلومات خلال أي منها، وبتعيين توزيع احتمالي لاختيار هذه القنوات المتصلة على التوازي يمكن أن تعالـج المسألـة بأن يُنـظر إليها على أنها تمثل حالة قناة واحدة (مركبة) [انظر مثلاً المسألة رقم ٢ ـ ٩].

امتداد المصدر (Extension of a Source)

تعريف:

الامتداد ذو الرتبة رقم k (k^{th} extension) للمصدر

$$A = \{a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n\}$$

هو:

$$A^k = A \times A \ldots\ldots\ldots \times A$$

حيث العلامة × هي رمز الضرب الفراغي، وتجري عملية الضرب هذه عدد $k-1$ من المرات

مثال ٢ ـ ٩:

نفرض أن المصدر A هو: $A = \{0, 1\}$

أوجد كلاً من الامتداد ذي الرتبة الثانية والامتداد ذي الرتبة الثالثة (ونطلق عليهما اختصاراً: الامتداد الثاني والامتداد الثالث) للمصدر A .

الحل:

الامتداد الثاني للمصدر A هو:

$$A^2 = A \times A$$
$$= \{00, 01, 10, 11\}$$

$$A^3 = A \times A \times A$$
$$= \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$$

من الواضح أنه إذا كان المصدر يتكون من عدد n منن الرموز، فإن

الامتداد رقم k للمصدر يحتوي على n^k رمـز. فمثلاً إذا كـان عدد عنـاصر المصدر هو $n = 2$ فإن عدد عناصر الامتداد الثالث (أي الامتداد رقم ٣) للمصدر هـو 2^3 أي ثمانية عناصر كما في المثال السابق.

وإذا فرضنا أن لدينا مصدراً ثنائياً A ، وأن احتمالي عنصريه كما يلي:

$$\begin{pmatrix} A \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}$$

فإن رموز الامتداد الثاني للمصدر واحتمالاتها هي:

$$\begin{pmatrix} A^2 \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_1 & a_1a_2 & a_2a_1 & a_2a_2 \\ p_1p_1 & p_1p_2 & p_2p_1 & p_2p_2 \end{pmatrix}$$

ومن الممكن إثبـات أن

$$H(A^2) = 2\,H(A)$$
$$H(A^3) = 3\,H(A)$$
$$\vdots$$
$$H(A^k) = k.\,H(A)$$

(انظر مثلاً المسألة رقم ١ - ٦)

امتداد القناة (Extension of a Channel)

تعريـف:

نفرض أن $\mathcal{V}$ قناة لها مجموعة المداخل $X = \{x_i\}$ ومجموعـة المخارج $. Y = \{y_j\}$

فإن الامتداد ذا الرتبة الثانية (Extension of 2nd order) للقناة $\mathcal{V}$ يُعرَّف بأنه قناة:

مداخلها هي مجموعة الأزواج المرتبة

$$X \times X = \left\{ (x_i, x_k) \right\}$$

ومخارجها هي مجموعة الأزواج المرتبة

$$Y \times Y = \left\{ (y_j, y_\ell) \right\}$$

واحتمالات عناصر مصفوفتها تعطى بالعلاقة

$$p(y_j, y_\ell \mid x_i, x_k) = p(y_j|x_i) \,.\, p(y_\ell|x_k)$$

(انـظر مثلاً المسـألة رقم ٢ ـ ٢٠ التي تتنـاول دراسة امتـداد القناة الثـنـائيـة المتماثلة، وكذلك المسألة رقم ٢ ـ ٢١ التي تعطي نوعاً من التعميم لامتـداد القناة، حيث تتناول هذه المسألة دراسة القناة المكافئة لضرب قناتين، وبذلك يعتبر امتداد القناة حالة خاصة من هذه القناة المكافئة حين تكون القناتان متماثلتين).

طريقة «مروجا» (Muroga's Procedure) لحساب سعة القناة ذات المصفوفة المربعة (Square channel matrix).

تسمى هذه الطريقة أيضاً طريقة «مروجا وسيلفـرمان» (Muroga and Silverman)، وتعتمـد على فكـرة استخدام ضـاربات لاجـرانج (Lagrange Multipliers) لإيجاد النهاية العظمى (maximizing) لتعبير المعلومات المتبـادلة $I(X,Y)$.

نفرض أن لدينا قناة معلومات معرفة بالمصفوفة المربعة

$$Q_{n\times n} = \{q_{ij}\}$$

$$I(X,Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

$$H(Y|X) = -\sum_{i,j} \pi_{ij} \log q_{ij}$$

$$= -\sum_{i} p_i \sum_{j} q_{ij} \log q_{ij}$$

سنعرِّف الكميات المساعدة (auxiliary quantities)

$$t_1, t_2, \ldots, t_n$$

بمجموعة العلاقات التالية:

$$(1)\begin{cases} q_{11}t_1 + q_{12}t_2 + \ldots + q_{1n}t_n = q_{11}\log q_{11} + q_{12}\log q_{12} + \ldots + q_{1n}\log q_{1n} \\ \vdots \\ q_{n1}t_1 + q_{n2}t_2 + \ldots + q_{nn}t_n = q_{n1}\log q_{n1} + q_{n2}\log q_{n2} + \ldots + q_{nn}\log q_{nn} \end{cases}$$

والتي يمكن كتابتها في الصورة

$$q_{11}t_1 + \ldots + q_{1n}t_n = \sum_{j=1}^{n} q_{1j} \log q_{1j}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$q_{n1}t_1 + \ldots + q_{nn}t_n = \sum_{j=1}^{n} q_{nj} \log q_{nj}$$

وبالتالي يمكننا التعبير عن $H(Y|X)$ بدلالة الكميات t_i's كما يلي:

$$H(Y|X) = -p_1 \sum_{j=1}^{n} q_{1j} \log q_{1j}$$
$$-p_2 \sum_{j=1}^{n} q_{2j} \log q_{2j}$$
$$\vdots$$
$$-p_n \sum_{j=1}^{n} q_{nj} \log q_{nj}$$
$$= -p_1 (q_{11}t_1 + \ldots + q_{1n}t_n)$$
$$-p_2 (q_{21}t_1 + \ldots + q_{2n}t_n)$$
$$\vdots$$
$$-p_n (q_{n1}t_1 + \ldots + q_{nn}t_n)$$

وبإعادة تجميع الحدود بأخذ العوامل المشتركة t_i's نحصل على:

$$H(Y|X) = -(p_1q_{11} + p_2q_{21} + \ldots + p_nq_{n1})t_1$$
$$-(p_1q_{12} + p_2q_{22} + \ldots + p_nq_{n2})t_2$$
$$\vdots$$
$$-(p_1q_{1n} + p_2q_{2n} + \ldots + p_nq_{nn})t_n$$

$$\Rightarrow H(Y|X) = -(\pi_{11} + \pi_{21} + \ldots + \pi_{n1})t_1$$
$$-(\pi_{12} + \pi_{22} + \ldots + \pi_{n2})t_2$$
$$\vdots$$
$$-(\pi_{1n} + \pi_{2n} + \ldots + \pi_{nn})t_n$$
$$= -q_1t_1 - q_2t_2 - \ldots - q_nt_n = -\sum_{j=1}^{n} q_jt_j$$

$$\Rightarrow I(X, Y) = H(Y) - H(Y|X)$$
$$= -\sum_{j=1}^{n} q_j \log q_j + \sum_{j=1}^{n} q_jt_j$$

ولإيجاد النهاية العظمى لهذه الدالـة I (في المتغيرات q_j) تحت الشرط

$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$ (constraint) بطريقة لاجرانج نكوّن الدالة $U \equiv U(q_j)$ كما يلي:

$$U = I(X, Y) + \lambda \sum_{j=1} q_j$$

حيث λ ثابت غير محدد (undetermined constant)، فإذا كانت I نهاية عظمى فإن $dI = 0$، وكذلك بما أن (ثابت) $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1 = \text{const}$

فإن $d\left(\sum_{j=1}^{n} q_j\right) = 0$، وبالتالي فإن:

$$dU = dI + \lambda d \sum_j q_j = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial q_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0 \quad ,.........., \quad \frac{\partial U}{\partial q_n} = 0$$

وبحل هذه المعادلات (وعددها n) مع المعادلة $\Sigma q_j = 1$، نحصل على قيم الكميات $q_1, q_2, \ldots, q_n, \lambda$ (وعددها n+1) التي تحقق هذه المعادلات (وعددها n+1).

$$U = -\sum_j q_j \log q_j + \sum_j q_j t_j + \lambda \sum_j q_j$$

$$0 = \frac{\partial U}{\partial q_k} = -q_k \cdot \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{q_k} - \log q_k + t_k + \lambda$$

$$-\frac{1}{\ln 2} - \log q_k + t_k + \lambda = 0 \; ; \; k = 1, 2, \ldots, n \qquad ....(*)$$

وهذه العلاقة تعطى n معادلة بحيث يجب أن تتحقق جميعها آنيا (simultaneously)، وهي:

$$-\frac{1}{\ln 2} - \log q_1 + t_1 + \lambda = 0$$

$$-\frac{1}{\ln 2} - \log q_2 + t_2 + \lambda = 0$$

$$\vdots$$

$$-\frac{1}{\ln 2} - \log q_n + t_n + \lambda = 0$$

ويمكن كتابة هذه المعادلات بالصيغة المختصرة التالية:

$$-\frac{1}{\ln 2} - \log q_i + t_i + \lambda = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{\ln 2} + \log q_i - t_i$$

وبتعويض هذه القيمة للثابت λ في المعادلة العامة

$$-\frac{1}{\ln 2} - \log q_j + t_j + \lambda = 0$$

(وذلك لحذف λ) نحصل على:

$$-\frac{1}{\ln 2} - \log q_j + t_j + \frac{1}{\ln 2} + \log q_i - t_i = 0$$

$$\Rightarrow t_i - \log q_i = t_j - \log q_j \quad i \neq j \qquad (**)$$

وبضرب طرفي المعادلة (*) في q_k ثم التجميع على k نحصل على:

$$-\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\ln 2} q_k + \sum_{k=1}^{n} q_k (t_k - \log q_k) + \sum_{k=1}^{n} \lambda q_k = 0$$

وحيث أن $\sum_{k=1}^{n} q_k = 1$

$$\therefore -\frac{1}{\ln 2} + \sum_{k=1}^{n} q_k (t_k - \log q_k) + \lambda = 0$$

ولكن المقدار $t_k - \log q_k$ ثابت بالنسبة لـ k كما يتضح من العلاقة (**)، ولذلك فإن:

$$-\frac{1}{\ln 2} + (t_k - \log q_k) . 1 + \lambda = 0$$

$$\Rightarrow t_k - \log q_k = \frac{1}{\ln 2} - \lambda \qquad (***)$$

وبهذا نستنتج أن الدالة $U \equiv U(q_j)$ تصل إلى نهاية عظمى عندما تحقق الكميات q_j, t_j الشرط (***) .

فإذا عوضنا هذه القيم في $I(X,Y)$ فإننا نحصل على أقصى قيمة لها وبالتالي نحصل على قيمة السعة C.

$$I(X,Y) = -\sum_{j=1}^{n} q_j \log q_j + \sum_{j=1}^{n} q_j t_j$$

$$= +\sum_{j=1}^{n} q_j (t_j - \log q_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} q_j \left(\frac{1}{\ln 2} - \lambda\right)$$

$$= \frac{1}{\ln 2} - \lambda = C$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{\ln 2} - \lambda = t_j - \log q_j$$

وهذا التعبير لسعة القناة يعتمد على كل من المتغيرات t_j واحتمالات الإخراج q_j. وفيما يلي نحاول إيجاد تعبير للسعة C بدلالة المتغيرات t_j فقط.

$$C = t_j - \log q_j \Rightarrow \log q_j = t_j - C \Rightarrow q_j = 2^{(t_j - C)}$$

$$1 = \sum_{j=1}^{n} q_j = \sum_{j=1}^{n} 2^{t_j - C} = \sum_{j=1}^{n} 2^{t_j} . 2^{-C} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{2^{t_j}}{2^C} = \frac{1}{2^C} . \sum_{j=1}^{n} 2^{t_j}$$

$$\Rightarrow 2^C = \sum_{j=1}^{n} 2^{t_j}$$

$$\Rightarrow C = \log \sum_{j=1}^{n} 2^{t_j} = \log (2^{t_1} + 2^{t_2} + \ldots + 2^{t_n}) \qquad (2)$$

حيث الكميات $t_1, t_2, \ldots, t_n$ نحصل عليها من مجموعة المعادلات الآنية (1) والتي فيها الطرف الأيمن عبارة عن مجاميع $\sum_{j=1}^{n} q_{ij} \log q_{ij}$ (لقيمة معينة لـ i) وهذه المجاميع كلها مقادير معلومة لقناة معلومة المصفوفة. وبذلك يمكننا تلخيص ما سبق فيما يلي:

ملخص كيفية حساب سعة القناة ذات المصفوفة المربعة

(Muroga's Procedure)

نفرض أن لدينا قناة معلومات معرفة بالمصفوفة المربعة

$$Q_{n\times n} = \{q_{ij}\} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}$$

سعة هذه القناة تعطى بالعلاقة :

$$\boxed{C = \log\left(2^{t_1} + 2^{t_2} + \ldots + 2^{t_n}\right)}$$

حيث الكميات $t_1, t_2, \ldots, t_n$ نحصـل عليها من مجموعة المعادلات الآنية (1).

مثال ٢ ـ ١٠ أحسب سعة قناة المعلومات المعرفة بالمصفوفة.

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

الحـــل

نحصل أولاً على قيم $t_i' s$ من المعادلات الآنية التالية :

$$\left(\frac{1}{4}\right)t_1 + \left(\frac{1}{2}\right)t_2 + \left(\frac{1}{4}\right)t_3 + (0)t_4$$
$$= \frac{1}{4}\log\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\log\frac{1}{4} + 0\log 0$$

$$(0)t_1 + (0)t_2 + (1)t_3 + (0)t_4$$
$$= 0\log 0 + 0\log 0 + 1\log 1 + 0\log 0$$

$$(0)t_1 + \left(\frac{1}{3}\right)t_2 + (0)t_3 + \left(\frac{2}{3}\right)t_4$$
$$= 0\log 0 + \frac{1}{3}\log\frac{1}{3} + 0\log 0 + \frac{2}{3}\log\frac{2}{3}$$

$$(0)t_1 + (1)t_2 + (0)t_3 + (0)t_4$$
$$0\log 0 + 1\log 1 + 0\log 0 + 0\log 0$$

وهذه المعادلات تختصر إلى :

$$
\begin{aligned}
t_1 + 2t_2 + t_3 &= -6 \\
t_3 &= 0 \\
t_2 + 2t_4 &= -2.7547 \\
t_2 &= 0
\end{aligned}
$$

وبحل هذه المعادلات بالنسبة للكميات t_i نحصل على :

$t_1 = -6 \quad , \quad t_2 = 0$

$t_3 = 0 \quad , \quad t_4 = -1.3774$

وبذلك فإن سعة القناة تساوي

$$
\begin{aligned}
C &= \log (2^{-6} + 2^{0} + 2^{0} + 2^{-1.3774}) \\
&= \log (2.4005) = 1.2633 \text{ bits/symbol}
\end{aligned}
$$

التوزيع الاحتمالي الأمثل للقناة ذات المصفوفة المربعة

يمكن بإجراء بعض الحسابات والاختصارات والعلاقات الرياضية إثبات أن التوزيع الاحتمال عند مدخل القناة ذات المصفوفة المربعة الذي يؤدي إلى بلوغ سعة القناة يعطى بالعلاقة :

$$p_i = 2^{-C} \sum_{j=1}^{n} q_{ji}^{-1} 2^{t_j} \quad ; \quad 1 \le i \le n$$

حيث q_{ji}^{-1} هي عناصر معكوس مصفوفة القناة (Q^{-1}). (elements of the inverse channel matrix)

[انظر مثلاً الملاحظة بعد حل مثال ٢ - ١١].

اختزال القنوات (Channel Reduction)

تمهيد:

في أنواع كثيرة من قنوات المعلومات في الحياة العملية تكون مجموعة مخرجات القناة أكبر بكثير مما يهم المستخدِم (user). فمثلاً البيانات العلمية التي يرسلها قمر صناعي عبر قناة ثنائية للاتصال عن بُعد (binary telemetry channel) غالباً ما تشتمل على معلومات لا علاقة لها بالظاهرة الأساسية قيد البحث. وفي مثل هذا النظام فإن الهوائي (antenna) على الأرض قد يستقبل سلسلة من نبضات ذوات سعات مختلفة. فيقوم جهاز الاستقبال بتفسير أي نبضة (pulse) ذات سعة (amplitude) أكبر من حد معين على أنها «1» بينما يفسر النبضة على أنها «0» إن كانت أصغر من هذا الحد. وبناءً على هذا فيمكننا أن ننظر في هذا الوضع إلى القناتين المختلفتين التاليتين:

الأولى: قناة لها مدخلات ثنائية (وهي التي يرسلها القمر الصناعي)، وعدد كبير من المخرجات (وهي التي تقابل سعات النبضات المميَّزة).

الثانية: قناة لها مدخلات ثنائية (وهي التي يرسلها القمر الصناعي)، ومخرجات ثنائية (وهي التي تقابل مخرجات جهاز الاستقبال).

وواضح أن القناة الثانية هي تبسيط للقناة الأولى، وتسمى "اختصاراً" أو "اختزالاً" للقناة الأولى.

تعريف:

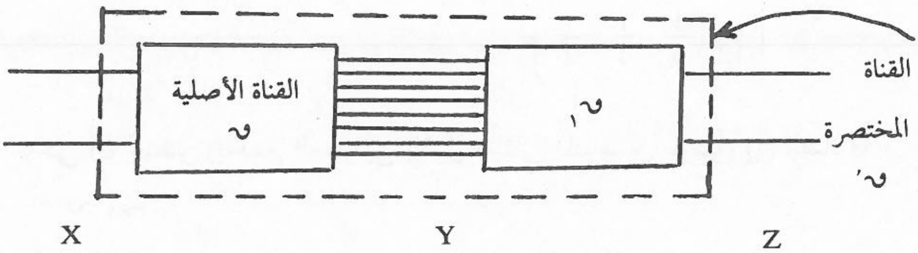
نفرض أن ى قناة معلومات عدد مدخلاتها n وعدد مخرجاتها m ومصفوفتها $Q \equiv Q_{n,m}$.

ونفرض أن ى′ قناة معلومات عدد مدخلاتها n وعدد مخرجاتها $m-1$ ومصفوفتها $Q' \equiv Q'_{n,m-1}$.

وأن المصفوفة Q' يمكن الحصول عليها من المصفوفة Q بجمع عمودين من أعمدة Q (أي بجمع المخرجين المقابلين لهذين العمودين في مخرج واحد).

القناة ى′ تسمى **اختصاراً بسيطاً أو اختزالاً بسيطاً** (elementary (reduction) للقناة ق. ويمكن تكرار عملية الاختصار البسيط هذه عدة مرات، وتسمى القناة الناتجة أخيراً اختصاراً أو اختزالاً (reduction) للقناة الأصلية ق.

فائدة:



الشكل المبين يوضح طريقة مفيدة لتمثيل القناة المختصرة (ق′) للقناة الأصلية (ق)، حيث تقوم القناة ق١ (المبينة بالشكل) بتجميع عدة رموز من المجموعة الأبجدية Y (مخرجات القناة ق) إلى عدد أقل من رموز المجموعة الأبجدية Z. وهذه الطريقة لتمثيل القنوات المختصرة تسمح لنا باستخدام النتائج الخاصة بالقنوات المتتابعة (أي المتصلة على التوالي) مثل: $I(X,Z) \leqslant I(X,Y)$ أي أن المعلومات المتبادلة بين المجموعتين الأبجديتين عند المدخل والمخرج تقل (أو على أحسن تقدير تبقى كما هي) عند اختزال قناة (وهذا هو الثمن الذي يُدفع لتبسيط القناة).

كما يمكن استخدام نتائج القنوات المتتابعة لاستنتاج نتائج خاصة بالقنوات المختزلة كالنتيجة التالية:

نتيجة: إذا كانت عناصر العمود j_1 في مصفوفة قناة ق في تناسب طردي مع العناصر المقابلة لها في العمود j_2، أي أن:

$$p(y_{j_1}|x) = \alpha \,.\, p(y_{j_2}|x) \quad \forall x \qquad (\alpha \text{ : ثابت})$$

فإنه يمكن جمع العناصر المتقابلة في العمودين j_1 , j_2 لنحصل على قناة مختصرة ق′، وهذه القناة تحقق الخاصية التالية: لأي توزيع احتمالي عند المدخل $P(X)$ فإن المعلومات المتبادلة خلال القناة المختصرة = المعلومات المتبادلة خلال القناة الأصلية

$$I(X,Y) = I(X,Z)$$

والقناة المختصرة التي تحقق هذه الخاصية تسمى **اختصاراً كافيــاً (Sufficient reduction)**

مثال ٢ ـ ١١ : القناة ق ≡ ق٢×٤ :

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

يمكن أن تختصر (بجمع العمودين الأول والثاني المتناسبين طردياً) إلى القناة ق′ ≡ ق′٢×٣ :

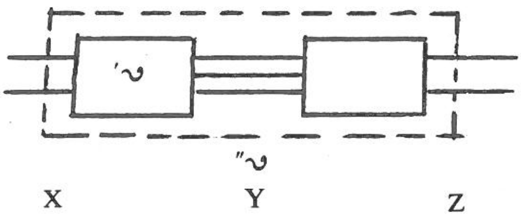
$$Q' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

التي تعد اختصاراً كافياً للقناة ق.

المطلوب :

أولاً : اختصار القناة ق′٢×٣ بدورها إلى قناة ق″٢×٢ تعد اختصاراً كافياً للقناة ق′٢×٣ وبالتالي للقناة الأصلية ق٢×٤ .

ثانياً : تحقيق أنه بالنسبة للتوزيع الاحتمالي المنتظم عند المدخل فإن :



المعلومات المتبادلة خلال القناة ق′٢×٣ =
المعلومات المتبادلة خلال القناة ق″٢×٢

وذلك عن طريق حساب المعلومات المتبادلة خلال كل من القناتين على حدة .

ثالثاً : إيجاد التوزيع الاحتمالي الأمثل عند مدخل القناة الأصلية ق ، وكـذلك سعتها، ثم حساب كفاءة الإرسال خلال القناة ق إذا وصل عند مدخلها :

أ) المصدر $\begin{pmatrix} X \\ p \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ .5 & .5 \end{pmatrix}$

ب) المصدر $\begin{pmatrix} X \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ .6 & .4 \end{pmatrix}$

الحــل:

أولا: العمودان الأول والثاني في القناة ۍ' متناسبان طردياً، ولذلـك يمكن جمعهما:

$$Q' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow Q'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = {}_{٢\times٢}''\text{ۍ}$$

ثانياً: (أ) **القناة ۍ'**

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow P(Y) = \left\{\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}\right\}$$

$$I_1 = 0.311325$$

(ب) القناة ۍ'':

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow P(Y) = \left\{\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right\}$$

$$I_2 = 0.311325 = I_1$$

ثالثاً: حيث أن القناة ۍ'' تعد اختصاراً كافياً للقناة الأصلية ۍ، فإن المعلومات المتبادلة خلال القناة ۍ'' تساوي المعلومات المتبادلة خلال القناة ۍ لأي توزيع احتمالي عند المدخل، وبالتالي يتساوى التوزيع الإحتمالي الأمثل في القناتين، كما تتساوى سعتاهما، وتتساوى كفاءتا الإرسال خلالهما لأي توزيع احتمالي عند المدخل. ولذلك فمن الآسهل حساب النتائج المطلوبة للقناة ۍ باستخدام القناة البسيطة ۍ''، والتي تسمى قناة Z [أنظر مثلاً المسألـة رقم ١ ـ ١٦].

$P_{opt} = \{0.6\ ,\ 0.4\}$

$C = 0.3219$ bits/symbol

a) $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow I = 0.311325$

(من ثانيا)

$$\eta = \frac{I}{C} = \frac{0.311325}{0.3219} = 96.7148\%$$

b) $P = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix} = P_{opt} \Rightarrow I = C \Rightarrow \eta = 100\%$

ملاحظة : يمكن أيضاً حساب P_{opt} & C للقناة Z باعتبارها قناة ثنائية عامة GBC حيث $\alpha = 1, \beta = \frac{1}{2}$ أو بتطبيق طريقة مروجا، كما يلي :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$t_1 + 0 = 0$$

$$\frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}t_2 = -1 \Rightarrow t_1 = 0,\ \ t_2 = -2$$

$$C = \log\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \log\frac{5}{4} = 0.3219$$

$$p_1 = 2^{-C}\sum_{j=1}^{2} q_{j_1}^{-1} . 2^{t_j}$$

$$= 2^{-C}\,[1.2^{0} + (-1).2^{-2}] = 0.6$$

$\Rightarrow p_2 = 0.4$ (نفس النتائج السابقة).

تمرينات
الفصل الثاني

تمرينات رقم ٢

٢ ـ١ يستطيع الإنسان تلقِّي المعلومات ونقلها وإرسالها بفضل الحواس التي أنعم الله سبحانه وتعالى بها عليه. والمطلوب حساب سعة القناة الإنسانية للمعلومات (مقاسة بعدد وحدات المعلومات في الثانية الواحدة) في حالة تلقِّي المعلومات عن طريق القراءة أي باستخدام نعمة الإبصار، بفرض أنه يمكن قراءة خمسمائة كلمة على الأكثر في الدقيقة الواحدة بدون إهمال أي كلمات أثناء القراءة، وبفرض أن متوسط عدد الحروف في الكلمة الواحدة هو خمسة وأن الحرف الواحد يعطي وحدة واحدة من المعلومـات (bit).

٢ ـ٢ وصِّلت القناة الثنائية المتماثلة (ق ث م BSC) المعرَّفة بمصفوفة القناة

$$P(Y \mid X) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

بمصدر ثنائي احتمالا عنصريه هما

$$p(x_1) = \frac{3}{4} \quad , \quad p(x_2) = \frac{1}{4}$$

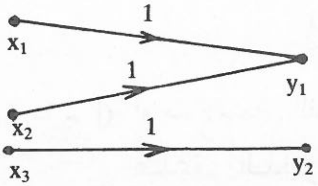
قارن سعة القناة C بقيمة المعلومات المتبادلة I.

٢ ـ٣ إحدى قنوات المحو الثنائية (ق م ث BEC) لها مدخلان 0, 1 وثلاثة

مخارج 0,e,1. أوجد سعة القناة إذا علم أن مصفوفة القناة هي:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

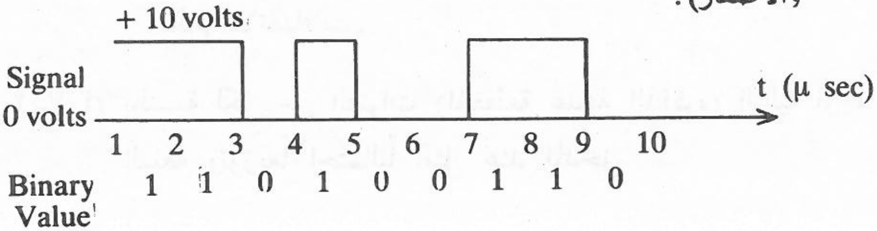
٢ ـ٤ من الممكن أن نصل إلى القيمة العظمى للمعلومات المتبادلة I بأكثر من توزيع احتمالي واحد عند المدخل. القناة المبينة بالشكل تعطي مثالاً توضيحياً لمثل هذه الحالة. أوجد تعبيراً للمعلومات المتبادلة I ثم أوجد شرط وصولها للقيمة العظمى، أي أوجد التوزيع الاحتمالي عند المدخل الذي يؤدي إلى وصول قيمة I إلى سعة القناة.



٢ ـ٥ نفرض أن إحدى القنوات الثنائية المتماثلة BSC معرَّفة بالإحتمال

$$\alpha \equiv p\,(y_1 \mid x_1) = 0.75$$

ونفرض أن الرموز عند المدخل ترسل بمعدل رمز واحد في الميكروثانية، وأن الرمز الواحد يستغرق ميكروثانية في العرض أو الاستمرار الزمني. (الشكل التوضيحي التالي يبين مجموعة رموز ثنائية متعاقبة من الآحاد والأصفار).



i) احسب أقصى قيمة لمعدل إرسال المعلومات (أي احسب السعة) بالنسبة لهذه القناة، بحيث تكون مقاسة

أ) بعدد وحدات المعلومات لكل رقم ثنائي (bits per binary digit)

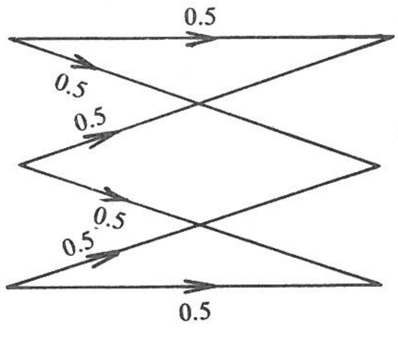
ب) بعدد وحدات المعلومات في الثانية الواحدة (bits per second).

ii) ما هي احتمالات الرموز عند المدخل التي تؤدي إلى بلوغ هذه السعة؟

iii) احسب القيمة الفعلية لمعدل الإرسال مقاساً بعدد الوحدات في الثانية (bits |sec) إذا علم أن التوزيع الاحتمالي عند المدخل هو:

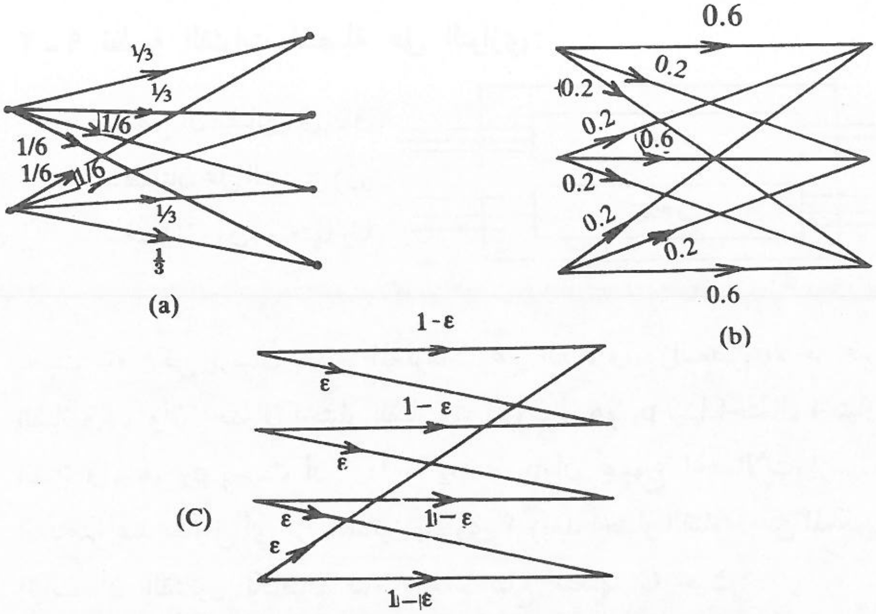
$$P(1) = \frac{2}{3} \quad , \quad P(0) = \frac{1}{3}$$

٢ ـ٦ ـ أ) أوجد سعة القناة المتقطعة عديمة الذاكرة (discrete memoryless channel DMC) المبينة بالشكل، وأوجد توزيعاً احتمالياً أمثل عند المدخل (an optimizing input probability distribution) أي توزيعاً يؤدي إلى بلوغ هذه السعة.



ب) إذا وصلت القناة بمصدر متقطع يرسل الرسائل (x_1, x_2, x_3) بالاحتمالات (0.6, 0.3, 0.1) على الترتيب، فاحسب قيمة كفاءة نظام الاتصالات.

٢ ـ٧ i) بالنسبة لكل من القنوات (المتقطعة عديمة الذاكرة) التالية أوجد السعة وتوزيعاً احتمالياً أمثل عند المدخل.

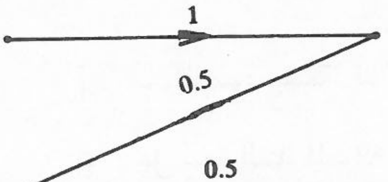


(a) (b) (C)

ii) إذا وصِّلت القناة (b) بمصدر متقطع يرسل الرسائل (x_1, x_2, x_3) بالاحتمالات $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ على الترتيب، فأوجد كفاءة نظام الاتصالات واحسب قيمة الإطناب فيه.

٨-١٢ لكل من قناتي الاتصال التاليتين أوجد سعة القناة وتوزيعاً احتمالياً عند المدخل يؤدي إلى بلوغ هذه السعة.

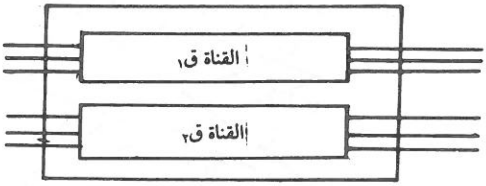
أ) قناة Z المعرفة بالمخطط السهمي المبين بالشكل.



ب) القناة عديمة المفقودات والمعرَّفة بالمصفوفة المبينة.

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.3 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

٢ ـ ٩ نظرية القنوات المتصلة على التوازي:



نفرض أن القناتين ق١، ق٢ متصلتان على التوازي (ق١ سعتها C_1، ق٢ سعتها C_2)

بحيث أنه يمكن إرسال بعض المعلومات عبر القناة ق١ والبعض الآخر عبر القناة ق٢، وأن احتمال اختيار القناة ق١ للإرسال هو p_1 بينما احتمال اختيار القناة ق٢ هو p_2 بحيث أن: $p_1 + p_2 = 1$ وأن مجموع احتمالات إرسال العناصر عند مدخل أي من القناتين يساوي ١ (بعد اختيار القناة). من الممكن إثبات أن القناتين تكافئان قناة واحدة تبلغ سعتها C حيث:

$$C = \log \left(2^{C_1} + 2^{C_2}\right)$$

وأن التوزيع الاحتمالي الذي يؤدي إلى الحصول على سعة القناة المكافئة هو:

$$p_i = 2^{(C_i - C)}, \quad i = 1,2$$

أ . ما المقصود بسعة قناة الاتصال؟

ب. هل سعة القناة المكافئة لقناتي اتصال تكون أكبر إذا كانت القناتان متصلتين على التوالي أم على التوازي، ولماذا؟

جـ. ترسل إحدى قنوات الاتصال ثلاث رسائل: س، ص، ع. الرسالة س تُستقبل دائماً صحيحة كما هي. الرسالة ص تستقبل صحيحة باحتمال يساوي α بينما تستقبل على أنها الرسالة ع باحتمال يساوي $(1-\alpha)$. وكذلك احتمال وصول الرسالة ع

صحيحة يساوي α واحتمال تغيرها إلى ص يساوي $(1-\alpha)$.

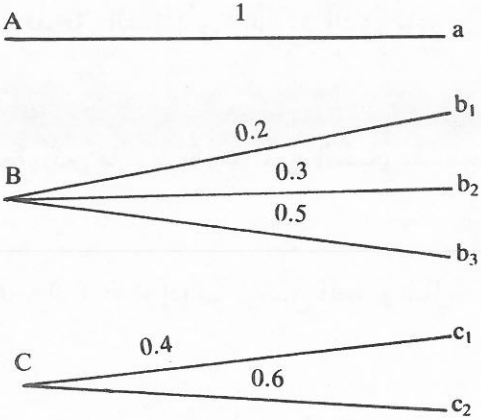
المطلوب:

١) حساب سعة هذه القناة بدلالة α ودراسة النتيجة في الحالة الخاصة $\alpha = 1$ وكذلك $\alpha = \frac{1}{2}$.

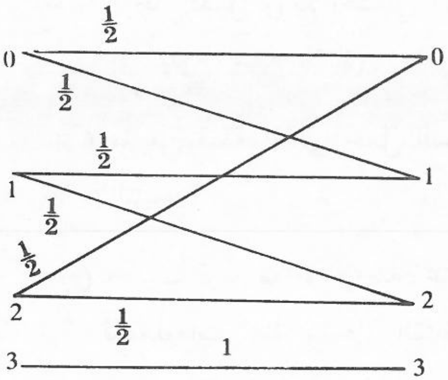
٢) حساب التوزيع الاحتمالي عند مدخل القناة والذي يؤدي إلى بلوغ السعة في الحالة الخاصة $\alpha = \frac{1}{2}$.

ملاحظة: يمكن حل المسألة بسهولة بإذن الله باعتبار القناة المعطاة قناتين متصلتين على التوازي.

٢ ـ١٠ ما قيمة سعة كل من قنوات الاتصال التالية:



(أ)



(ب)

$$\begin{bmatrix} \frac{1-p}{2} & \frac{1-p}{2} & \frac{p}{2} & \frac{p}{2} \\ \frac{p}{2} & \frac{p}{2} & \frac{1-p}{2} & \frac{1-p}{2} \end{bmatrix}$$

(جـ)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 0 & e & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 1-p & p & 0 \\ 0 & p & 1-p \end{bmatrix} \end{array}$$

(د)

٢-١١

أولاً: المصفوفة التالية هي مصفوفة إحدى قنوات المعلومات.

$$\begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & 0 \\ p & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & p \\ 0 & 0 & p & 1-p \end{pmatrix}$$

أ) أوجد سعة هذه القناة بدلالة المتغير p.

ب) ارسم المنحنى الذي يعطي العلاقة بين سعة القناة والمتغير p.

حـ) أوجد أفضل توزيع احتمالي عند مدخل القناة (أي التوزيع الذي يؤدي إلى بلوغ سعة القناة).

د) ما هي قيمة p التي تجعل السعة أكبر ما يمكن؟ وما المعنى الطبيعي لهذه النتيجة؟

هـ) احسب قيمة كفاءة الإرسال عندما $p = 0.2$ إذا تمّ توصيل المصدر التالي للمعلومات عند مدخل القناة:

$$\begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$$

ثانياً: إذا فرضنا أن مصفوفة القناة قد تغيرت لتصبح كما يلي:

$$\begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & 0 \\ p & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-q & q \\ 0 & 0 & q & 1-q \end{pmatrix}$$

أ) أوجد سعة القناة بدلالة المتغيرين p,q . وحقق أن هذه النتيجة تعطي القيمة السابقة (في أ) - أولاً) عند التعويض عن q بالقيمة p .

ب) احسب سعة القناة عند $p = 0.2,\ q = 0.3$.

حـ) احسب كذلك التوزيع الاحتمالي عند مدخل القناة (عند $p=0.2,\ q=0.3$) الذي يؤدي إلى بلوغ هذه السعة.

٢ - ١٢

تعريف قناتي الاتصال ق١ ، ق٢:

القناة ق١ : لها أربعة مداخل هي العناصر ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ وأربعة مخارج هي نفس العناصر. وعند إرسال العنصر ك (حيث ك = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣) فإن جهة الاستقبال إما أن تستقبل العنصر ك أو العنصر ك + ١ وذلك بنفس الاحتمال (مع مراعاة أن ك + ١ تعني صفراً عندما ك = ٣).

القناة ق٢ : ترسل عنصرين أ ، ب واحتمال استقبال العنصر أ صحيحاً هو ٠,٨ بينما احتمال استقباله عنصراً ثالثاً حـ هو ٠,٢ ، وكذلك احتمال استقبال العنصر ب صحيحاً هو ٠,٨ بينما احتمال استقباله حـ هو ٠,٢ (أي توجد ثلاثة عناصر أ ، ب ، حـ عند الاستقبال).

ملاحظة:

من المعلوم أنه بالنسبة لأي قناة اتصال عامة ليس من الضروري حتماً وجود توزيع احتمالي عند المدخل $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ يؤدي إلى توزيع احتمالي منتظم $(q_1 = q_2 = \ldots = q_j = \ldots = q_m)$ عند المخرج.

المطلوب:

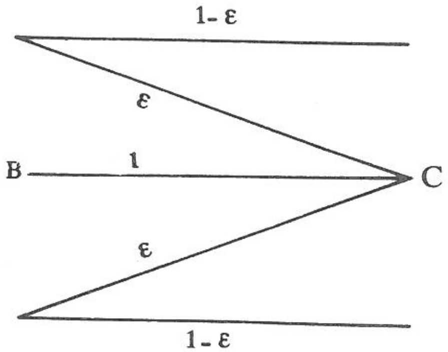
(١) إثبات أنه لا يوجد أي توزيع احتمالي عند مدخل القناة ق٢ يؤدي إلى توزيع احتمالي منتظم عند مخرجها.

(٢) إثبات أنه بالنسبة لأي قناة منتظمة (uniform channel) فإن التوزيع الاحتمالي المنتظم عند المدخل ($p_i = \frac{1}{n} \forall i$) يؤدي إلى توزيع احتمالي منتظم عند المخرج ($q_j = \frac{1}{m} \forall j$)

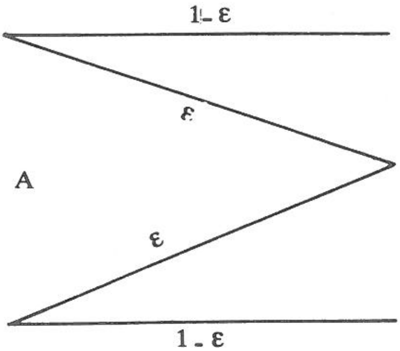
(٣) حساب سعة القناة ق١، وكذلك التوزيع الاحتمالي عند المدخل الذي يؤدي إلى الوصول إلى هذه السعة.

(٤) حساب سعة القناة ق٢.

٢ ـ ١٣



القناة ق١



القناة ق٢

أ . ما هي قيمة سعة القناة ق٢؟

ب . نفرض ان المعلومات أرسلت من الموضع A إلى الموضع C عن طريق توصيل كل مخرج من مخارج القناة ق٢ إلى المدخل المقابل له في القناة ق١.

ما قيمة سعة القناة المكافئة للقناتين ق١ ، ق٢ المتصلتين على التوالي؟

جـ. نفرض أن المصدر الثنائي $\begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ 0.25 & 0.75 \end{pmatrix}$ تم توصيله عند الموضع A ، فما قيمة المعلومات المتبادلة بين الطرف A والطرف C (للحالة $\varepsilon = 0.2$) ؟

وما قيمة كفاءة الإرسال خلال هذه القناة المركبة؟

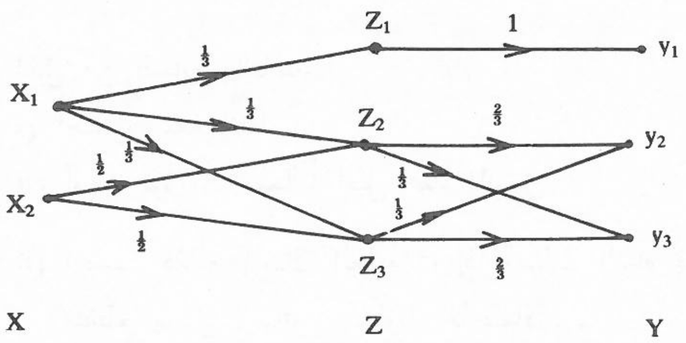
٢ -١٤

نفرض أن القناة $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ قد وصلت

على التوالي مع القناة $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ كما هو مبين

في الشكل التالي اثبت أن $I(X,Y) = I(X,Z)$

لأي توزيع احتمالي $P(X)$ عند المدخل X.



٢ ـ١٥ سعة القناة الثنائية العامة GBC المعرفة بالمصفوفة

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$ تعطى بالعلاقة التالية:

$$C = \frac{\alpha H(\beta) - \beta H(\alpha)}{\beta - \alpha} + \log \left[1 + 2^{\frac{H(\alpha) - H(\beta)}{\beta - \alpha}} \right]$$

حيث $H(\alpha) = -\alpha \log \alpha - (1-\alpha) \log (1-\alpha)$

والتوزيع الاحتمالي الأمثل عند المدخل والذي يؤدي إلى بلوغ السعة يعطى بالعلاقة:

$$P_{max} = \{p, 1-p\}$$

حيث:

$$P = \frac{1}{\beta-\alpha} \left[\beta - \frac{1}{1+2^{\frac{H(\beta) - H(\alpha)}{\beta - o}}} \right]$$

أ) اثبت أنه إذا كانت القناة الثنائية متماثلة فإن التعبيرين السابقين للسعة وللتوزيع الأمثل يعطيان:

$$C = 1 - H(\alpha) \quad , \quad P_{max} = \{ \tfrac{1}{2} , \tfrac{1}{2} \}$$

ب) لكل من القناتين التاليتين:

i) احسب سعة القناة.

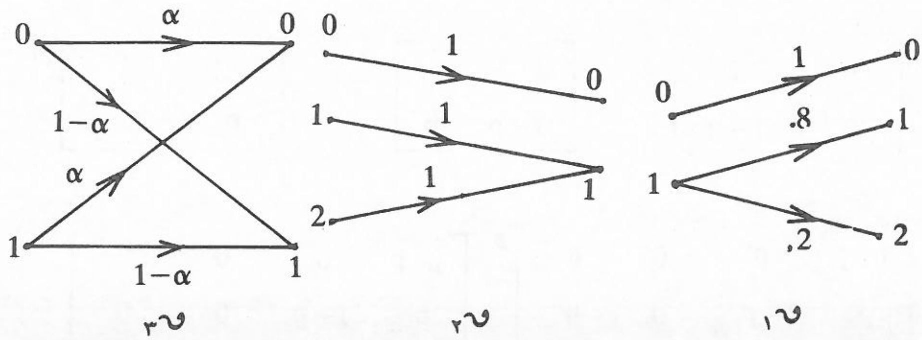
ii) أوجد توزيعاً احتمالياً أمثل عند المدخل.

iii) احسب كفاءة إرسال المعلومات إذا وُصِّلت القناة بمصدر ثنائي متقطع يرسل رسائل متساوية الاحتمالات.

$$\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$$

القناة (ب)　　　　　القناة (أ)

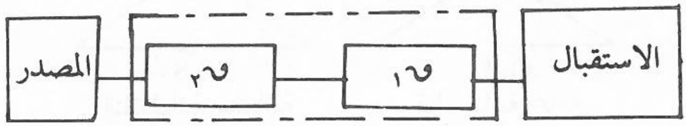
٢ ـ١٦ . أ) كم قيمة سعة كل من القنوات الثلاث ق١ ، ق٢ ، ق٣ المبينة بالرسم مع ذكر السبب؟



ب) إذا وصلت القناتان ق١ ، ق٢ على التوالي بحيث تُرسَل عناصر المصدر عبر مداخل القناة ق٢ كما هو مبين بالرسم، فكم قيمة سعة القناة المكافئة للقناتين على التوالي؟ وكم قيمة كفاءة الإرسال إذا كانت عناصر المصدر واحتمالاتها هي:

$$\begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}$$ ، وكم قيمة

الإطناب في عملية الإرسال؟



جـ) إذا وصلت القناتان ق١ ، ق٢ على التوالي بعكس الترتيب السابق، فكم قيمة سعة القناة المكافئة؟

د) إذا وصلت القناتان ق١ ، ق٢ على التوازي فكم قيمة سعة القناة المكافئة للقناتين؟ وما هو التوزيع الاحتمالي عند مداخل القناتين الذي يؤدي إلى بلوغ هذه السعة؟

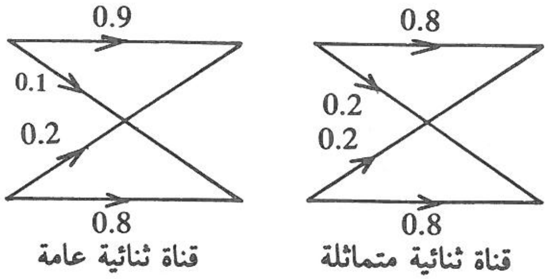
٢ ـ١٧ كم قيمة سعة كل من قنوات المعلومات التالية (مع ذكر السبب)؟

أ. $\begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 1-p & p \\ 1-p & p \end{bmatrix}$ جـ. $\begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix}$

د $\begin{bmatrix} 1-p & p & 0 & 0 \\ p & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-q & q \\ 0 & 0 & q & 1-q \end{bmatrix}$ هـ $\begin{bmatrix} 1-p & p & 0 & 0 \\ p & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & p \\ 0 & 0 & p & 1-p \end{bmatrix}$

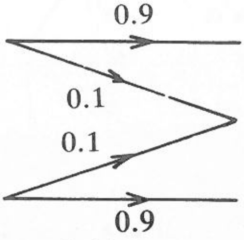
٢ ـ١٨ أي قناة من القنوات الثنائية التالية يعبر خلالها أكبر قدر من المعلومات المتبادلة I من المصدر

$$\begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$ إلى جهة الاستقبال؟

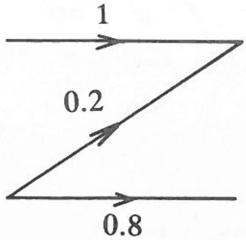


قناة ثنائية عامة
GBC

قناة ثنائية متماثلة
BSC

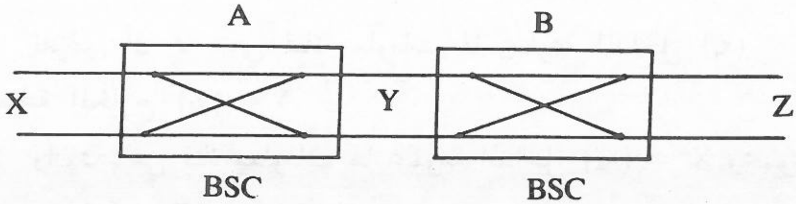


قناة محو ثنائية
BEC



قناة Z
Z-Channel

٢ ـ١٩ وصّلت قناتان ثنائيتان متماثلتان ـ احتمال الخطأ في كل منهما يساوي 0.2 ـ على التوالي كما هو مبين بالشكل.



i) أوجد سعة القناة المركبة (cascade combination) وقارنها بسعة كل من القناتين على حدة.

ii) إذا وصّلنا مصدراً ثنائياً X يرسل رسائل متساوية الاحتمالات بالقناة المركبة فكم تكون القيمة المتوسطة للمعلومات المتبادلة (transinformation) خلال كل قناة وخلال القناة المركبة؟
أوجد كفاءة الإرسال بالنسبة للقناة المركبة.

٢ ـ٢٠ إذا كانت القناة الثنائية المتماثلة (BSC) تُعَرَّف بالمصفوفة $\begin{pmatrix}\alpha & \alpha'\\ \alpha' & \alpha\end{pmatrix}$ حيث $\alpha + \alpha' = 1$، فإن القناة التربيعية $(BSC)^2$ التي هي الامتداد الثاني للقناة الثنائية المتماثلة هي قناة لها أربعة مدآخل وأربعة مخارج، وتُعَرَّف بالمصفوفة التالية:

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\alpha' & \alpha'\alpha & \alpha'^2 \\ \alpha\alpha' & \alpha^2 & \alpha'^2 & \alpha'\alpha \\ \alpha'\alpha & \alpha'^2 & \alpha^2 & \alpha\alpha' \\ \alpha'^2 & \alpha'\alpha & \alpha\alpha' & \alpha^2 \end{pmatrix}$$

أ) أوجد سعة هذه القناة التربيعية، وقارن هذه السعة بسعة القناة الثنائية المتماثلة.

ب) احسب قيمة سعة هذه القناة التربيعية عندما $\alpha = 0.8$.

٢ - ٢١

تعريف القناة المكافئة لضرب قناتين (Product Channel):

نفرض أن ق هي قناة معلومات لها مجموعة المداخل $X = \{x_i\}$ ومجموعة المخارج $Y = \{y_j\}$

وأن ق٢ هي قناة معلومات لها مجموعة المداخل $X' = \{x'_k\}$ ومجموعة المخارج $Y' = \{y'_\ell\}$

فإن القناة ق المكافئة لضرب القناتين ق١، ق٢ تعرف بأنها قناة:

سداخلها هي مجموعة الأزواج المرتبة $U = X \times X' = \{(x_i,\ x'_k)\}$

ومخارجها هي مجموعة الأزواج المرتبة $V = Y \times Y' = \{(y_j,\ y'_\ell)\}$

واحتمالات عناصر مصفوفتها تعطى بالعلاقة

$$p(y_j, y'_\ell \mid x_i, x'_k) = p(y_j \mid x_i) \cdot p(y'_\ell \mid x'_k)$$

أي أن هذه القناة تعمل بإرسال عنصر خلال القناة ق١ ثم عنصر خلال ق٢ مستقلاً عن العنصر السابق.

يمكن إثبات أن سعة القناة المكافئة لضرب قناتين تساوي مجموع سعتيهما

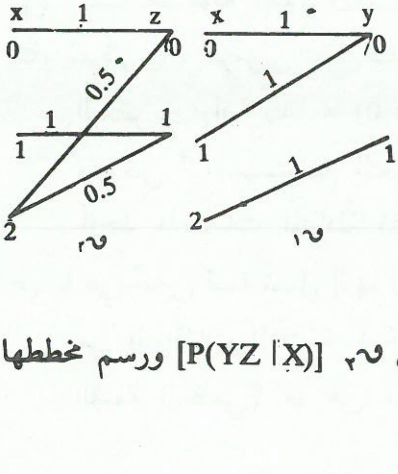
$$C = C_1 + C_2 \qquad (*)$$

أ) احسب عناصر مصفوفة القناة المكافئة لضرب القناتين الثنائيتين التاليتين:

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ x'_1 \\ x'_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} y'_1 & y'_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}$$

ب) احسب سعة كل من القناتين السابقتين وسعة القناة المكافئة لضربهما (بمعلومية مصفوفة القناة)، ثم حقق ان هذه السعات الثلاث تحقق العلاقة السابقة (*).

٢ ـ ٢٢ يرسل مصدر المعلومات X عناصر من مجموعة الرموز {0,1,2} والتي احتمالاتها على الترتيب هي $\{\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\}$ ، بحيث أن كل عنصر يُرسَل مباشرة خلال كل من القناتين ق١، ق٢ (المبينتين بالشكل) في آنٍ واحد.



فإذا رمزنا لمخرج القناة ق١ بالرمز y ولمخرج القناة ق٢ بالرمز z فيمكن اعتبار أن القناتين تكافئان قناة واحدة يدخلها العنصر x ويخرج منها العنصر $u \equiv yz$.

المطلوب إيجاد:

أ. مصفوفة القناة المكافئة للقناتين ق١ ، ق٢ $[P(YZ \mid X)]$ ورسم مخططها السهمي.

ب. سعة القناة المكافئة.

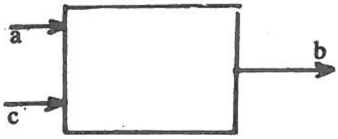
حـ. القيمة المتوسطة لمعلومات المصدر $H(X)$.

د. القيمة المتوسطة للمعلومات عند مخرج كل من القناتين ق١ ، ق٢ $H(y), H(z)$ وعند مخرج القناة المكافئة $H(YZ)$

هـ. قيمة المعلومات المتبادلة خلال كل من القناتين ق١ ، ق٢ $I(X,Y)$, $I(X,Z)$ وخلال القناة المكافئة $I(X,YZ)$ وتحقيق العلاقة

$$I(X,YZ) = I(X,Y) + I(X,Z)$$

٢ ـ ٢٣ القناة الضربية الثنائية (binary multiplicative channel)



المبينة بالشكل لها مدخلان ثنائيان a,c ومخرج ثنائي واحد b، حيث $b = a.c$. بما أن كلاً من a,c يمكن أن يأخذ القيمة ١ أو صفر فتكون مجموعة التوافقات الأربعة المختلفة الممكنة عند المدخل هي المجموعة الأبجدية A' (للمدخل المركّب الجديد)، حيث:

$$A' = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix}$$

أ) اكتب مصفوفة القناة (Q) للقناة ذات المدخل A' والمخرج B.

ب) نفرض أن الرمزين a,c عند المدخل يُختاران مستقلين عن بعضيهما البعض، وأن $P(a = 0) = \omega_1, \; P(c = 0) = \omega_2$

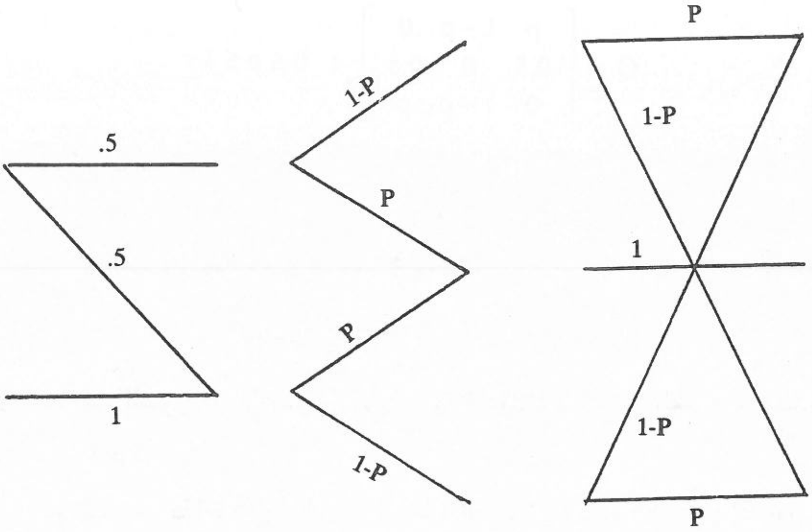
ونفرض أننا سنستخدم التعريف: $\omega_1' = 1 - \omega_1, \omega_2' = 1 - \omega_2$.

أوجد المعلومات المتبادلة $I(A', B)$.

حـ) ما هي أقصى قيمة تصل إليها $I(A',B)$ عندما تتغير كل من ω_1, ω_2؟ وما هي التوافقات المختلفة الممكنة للاحتمالين ω_1, ω_2 للوصول إلى هذه القيمة العظمي؟ ما هي سعة هذه القناة؟

٢ ـ ٢٤

(i) كم تبلغ سعة كل من قنوات المعلومات التالية؟ ولماذا؟ وما هو التوزيع الاحتمالي الأمثل عند مدخل كل منها؟



(جـ) (ب) (أ)

(ii) كم تبلغ كفاءة الإرسال وقيمة الإطناب إذا أرسل مصدر معلومات ثنائي عنصريه باحتمالين متساويين عبر القناة (جـ)؟

٢ ـ ٢٥ احسب كفاءة إرسال المعلومات من المصدر

$$X = \{x_1, x_2, x_3\}$$

$$P(X) = \{0.4, 0.2, 0.4\}$$

خلال كل من القناتين التاليتين على حدة:

$$\text{(i)}\begin{bmatrix} .5 & .3 & .2 \\ .2 & .5 & .3 \\ .3 & .2 & .5 \end{bmatrix} \qquad \text{(ii)}\begin{bmatrix} .4 & .3 & .1 & .1 & .1 \\ .16 & .5 & .04 & .15 & .15 \\ .24 & .2 & .06 & .25 & .25 \end{bmatrix}$$

٢ ـ ٢٦

أ) اثبت أن سعة القناة الثلاثية (ternary channel) المعرفة بالمصفوفة التصادفية (stochastic matrix)

$$Q = \begin{bmatrix} p & 1-p & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1-p & p \end{bmatrix} \; ; \quad 0 \le p \le 1$$

تُعطَى بالعلاقة:

$$C = \log\left(1 + 2^{\frac{p-h}{1-p}}\right)$$

حيث

$$h = -p \log p - (1-p) \log (1-p)$$

ب) ما هو التوزيع الاحتمالي الأمثل P_{opt} عند مدخل القناة Q عندما $p = 0.5$؟

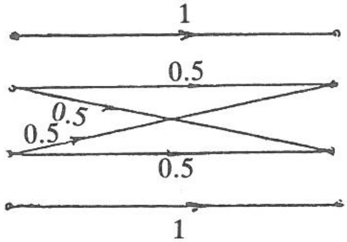
ج) كم تساوي كفاءة الإرسال خلال هذه القناة Q عندما $p = 0.5$ إذا أرسل مصدر المعلومات $\{x_1, x_2, x_3\}$ عناصر الثلاثة بالاحتمالات $P = \{.2, .6, .2\}$ خلال القناة؟

٢ ـ ٢٧

(i) كم تبلغ سعة كل من القناتين التاليتين؟

(ii) وما هو التوزيع الاحتمالي الأمثل عند مدخل كل منهما؟

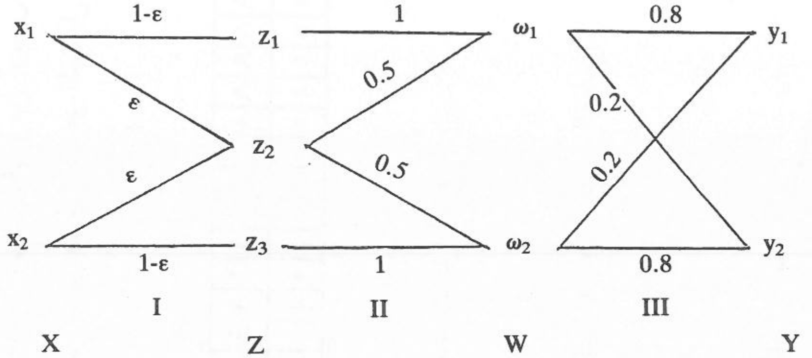
(أ)



(ب)

$$\begin{pmatrix} .5 & .5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ .5 & 0 & .5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .5 & .5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .2 & .2 & .3 & .3 \\ 0 & 0 & 0 & .3 & .3 & .2 & .2 \end{pmatrix}$$

٢ ـ ٢٨



يتم إرسال المعلومات من المصدر X إلى جهة الاستقبال Y عن طريق ثلاث قنوات متتابعة كما هو مبين بالرسم.

أ)كم تبلغ سعة كل من القنوات الثلاث I, II, III؟ علماً بأن التوزيع الاحتمالي الأمثل بالنسبة للقناة II هو $P_{max} \equiv P_{opt} = \{0.5,0,0.5\}$.

ب) وكم تبلغ سعة القناة المكافئة لهذه القنوات الثلاث؟

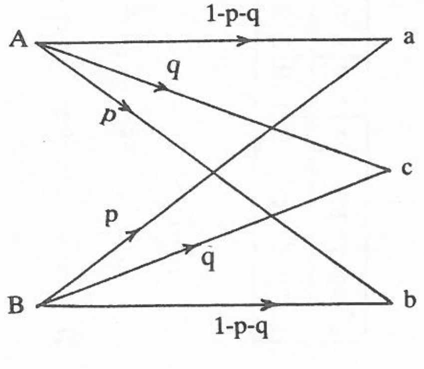
جـ) نفرض أن احتمال الخطأ في القناة I قيمته $\varepsilon = \frac{1}{3}$، وأن المصدر الثنائي X أرسل العنصرين $x_1=0\ ,\ x_2=1$ باحتمالين متساويين.

(١) فكم تبلغ كفاءة الإرسال خلال القناة II؟

(٢) وكم تبلغ كفاءة الإرسال خلال القناة المركبة؟

(٣) وكم تبلغ قيمة الإطناب في هذا النظام للإتصالات؟

٢ ـ ٢٩ قناة المحو الثنائية المتماثلة Binary Symmetric Erasure Channel (BSEC) تُعرَّف بالمخطط السهمي المبين بالشكل.



أ) نفرض أن مصدراً ثنائياً قد وُصِّل عند مدخل هذه القناة، وأن هذا المصدر قد أرسل رسالة مكونة من أربعين رمزاً. والجدول التالي يبيِّن هذه الرسالة وكذلك الرسالة المستقبلة، حيث يعطى كل رمز مرسَل والرمز المستقبَل المقابل له.

الرسالة المرسلة	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
الرسالة المستقبلة	c	a	a	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	c	b	b	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a

من هذا الجدول أحسب قيمة كل من p, q، وبالتالي أوجد مصفوفة هذه القناة.

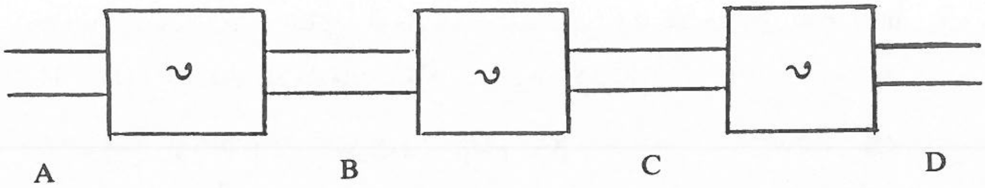
ب) نفرض أن المصدر الثنائي $\begin{pmatrix} A & B \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix}$ حيث $0<\alpha<1$، قد وُصِّل عند مدخل القناة.

i) أوجد تعبيراً للمعلومات المتبادلة I بدلالة α.

ii) ما هي قيمة α التي تجعل المعلومات المتبادلة تصل إلى قيمتها العظمى؟ وكم تبلغ هذه القيمة العظمى؟

جـ) أوجد سعة القناة، وأحسب قيمة كفاءة الإرسال عبر القناة عند $\alpha = 0.4$.

٢ ـ ٣٠ نفرض أن ق: قناة ثنائية متماثلة احتمال الخطأ فيها p. وُصِّلت على التوالي ـ كما هو مبين بالشكل ـ ثلاث قنوات من نوع هذه القناة ق.



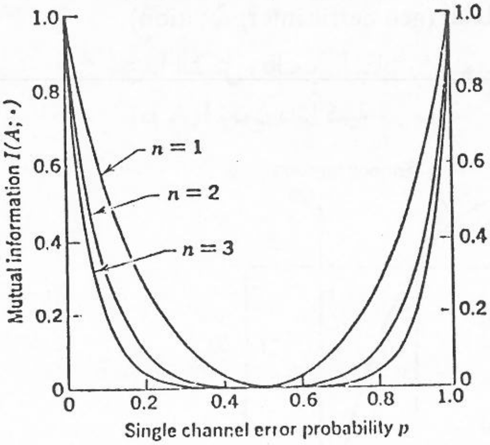
ووُصِّل عند الطرف A أي عند مدخل القناة الأولى ـ مصدر ثنائي يرسل عنصرية باحتمالين متساويين.

المطلوب: (أ) إثبات أن:

$$I(A,B) = 1 - H(p)$$
$$I(A,C) = 1 - H(2pp')$$
$$I(A,D) = 1 - H(3pp'^2 + p^3)$$

حيث: $p' = 1 - p$

ب) حساب قيمة كل من المعلومات المتبادلة $I(A,C)$، $I(A,B)$ عندما يكون احتمال الخطأ في القناة ق: $p = 0.2$ والتحقق من صحة كل من هاتين القيمتين باستخدام الشكل المبين الذي يعطى منحنيات المعلومات المتبادلة لعدد n من القنوات الثنائية المتماثلة المتتابعة بفرض التوزيع الاحتمالي المنتظم عند المدخل.



حـ) إيجاد كل من $I(C,D)$، $I(B,D)$، $I(B,C)$، بدلالة الاحتمال p.

ء) إيجاد سعة القناة المكافئة للقنوات الثلاث على التوالي.

هـ) حساب كفاءة الإرسال خلال كل من:

(١) القناة الأولى المتصلة مباشرة بالمصدر.

(٢) القناة المكافئة للقنوات الثلاث.

٢ ـ ٣١ يرسل مصدر ثنائي للمعلومات العنصرين 0,1 بالاحتمالين $p(0) = \omega$, $p(1) = \overline{\omega}$ عبر قناة للمعلومات مُعَرَّفة بمصفوفة الانتقال

$$\begin{pmatrix} \bar{p} & p \\ p & \bar{p} \end{pmatrix} \qquad \text{حيث:} \qquad \bar{p} = 1 - p$$

أ) اثبت أن المعلومات المتبادلة خلال هذه القناة تُعْطَى بالعلاقة:

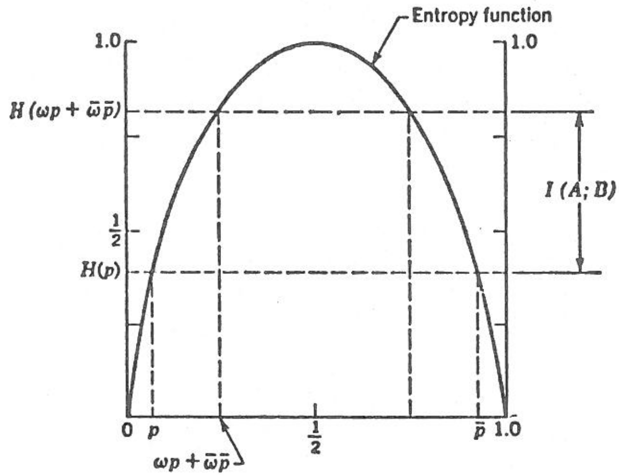
$$I(A, B) = H(\omega p + \overline{\omega}\,\bar{p}) - H(p) \qquad (*)$$

حيث H هي دالة القيمة المتوسطة للمعلومات (الانتروبيا entropy function) لمصدر ثنائي، وتُعَرَّف بالعلاقة:

$$H(x) = x \log \frac{1}{x} + (1-x) \log \frac{1}{(1-x)}$$

ب) استخدم هذا التعبير للمعلومات المتبادلة I لإيجاد سعة هذه القناة C.

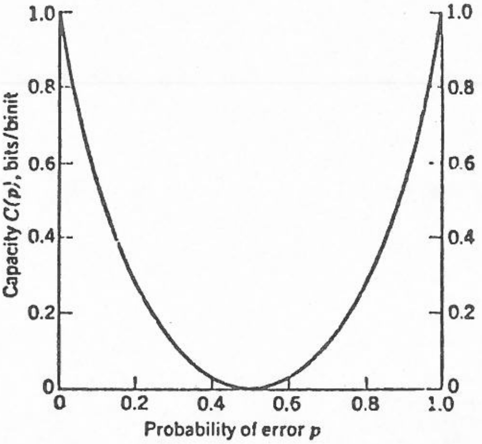
جـ) الشكل المبين يعطى منحنى دالة الانتروبيا H، ويعطى كذلك التفسير الهندسي (geometric interpretation) للمعلومات المتبادلة خلال قناة ثنائية متماثلة. استعن بهذا الشكل وبالتعبير السابق(*) للمعلومات المتبادلة، لإثبات أن المعلومات المتبادلة I(A,B) تكون دائماً كمية غير سالبة.



[إرشاد: المقدار $(\omega p + \bar{\omega}\,\bar{p})$ دائماً محصور بين $p\ ,\ \bar{p}$

قارن بين قيمة $H(\omega p + \bar{\omega}\,\bar{p})$ وقيمة $H(p)$].

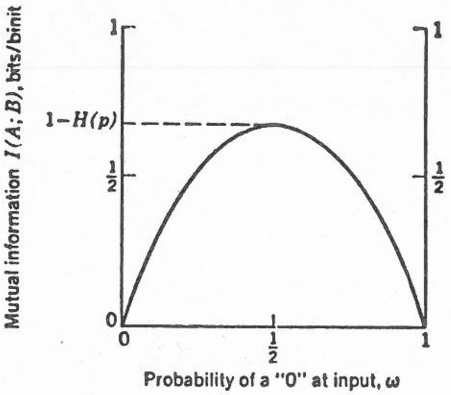
د) نفرض أن احتمال الخطأ في قناة المعلومات $p = 0.1$



(١) احسب سعة هذه القناة، وقارنها بالقيمة التي تحصل عليها من منحنى العلاقة بين سعة القناة الثنائية المتماثلة C واحتمال الخطأ P (انظر الشكل).

(٢) احسب قيمة المعلومات المتبادلة $I(A,B)$ - باستخدام العلاقة (*) عندما:

$\omega = 0.3$ (i) $\omega = 0.5$ (ii)



(٣) استعن بالشكل المبين الذي يعطى المعلومات المتبادلة I كدالة في الاحتمال ω لقيمة ثابتة P وذلك لإيجاد قيمة المعلومات المتبادلة I عندما $\omega = 0.3$.

(٤) احسب كفاءة الإرسال عبر القناة عندما $\omega = 0.3$.

الفصل الثالث

الشفـــرات

* تعريفها ـ أهميتها .
* متوسط طول كلمة الشفرة .
* الشفرة الواضحة واللحظية والمثلى .
* كفاءة الشفرة .
* بعض الشفرات الخاصة وطرق تكوينها .
* شجرة الشفرة الثنائية .
* طريقتا : شانون ـ فانو ، وهوفمان لصياغة الشفرات .
* شفرات اكتشاف الأخطاء وتصحيحها.
* شفرات هامنج .

الفصل الثالث

الشفرات

Coding

(Encoding And Decoding)

تمهيـــد :

الشكل المرسوم يبين نظام اتصالات بسيط حيث يقوم جهاز صياغة الشفـرة بترجمة رسائل مصدر المعلومات إلى رموز خاصـة تُرسـل عبر القنـاة ثم يقوم جهـاز ترجمة الشفرة بإعادة ترجمة الرسائل المستقبلة إلى صيغتهـا الأصلية لتصـل إلى جهة الاستقبال بصورتها التي أطلقها المصدر.

تعـريف: الشفـرة (Code) هي دالـة أو تـطبيق (mapping) من الكلمات (أي المتتاليات أو السلاسل) المكونة من مجمـوعة حـروف المصدر الأبجـديـة (Sequences of symbols from the source alphabet) إلى كلمات ـ تسـمى كـلمات الشفرة ـ (Codewords) مكونة من مجموعة أبجدية أخرى تسمى مجموعة الشفـرة الأبجدية(Code alphabet).

وعملية التشفير (coding/encoding) هي عملية إعطاء أو إسناد هذه الدالة (أو التحويل transformation أو الترجمة translation) من لغة إلى أخرى.

وعمليـة فك الشفـرة أو إعـادة تـرجمـة الشفـرة (decoding) هي العمليـة العكسية لعملية التشفير.

مثـال ٣ ـ ١:

(أ) نفرض أن رموز أحد المصادر قد أعطيت كلمات الشفرة التالية:

كلمات الشفرة		رموز المصدر
0	:	x_1
01	:	x_2
10	:	x_3

فتُترجم الرسالة $x_1\, x_3\, x_1\, x_2$ مثلاً في هذه الشفرة إلى:

$$x_1\, x_3\, x_1\, x_2 \;\rightarrow\; 0\,1\,0\,0\,0\,1$$

(ب) إذا أعـطينا السلسلة 1 0 0 0 1 0 وطُلب منـا فـك الشفـرة لإعـادة ترجمة هـذه السلسلة إلى رسالـة المصدر، فـإن الرسـالة الأصليـة قد تكـون إحدى الرسالتين التاليتين:

$$0\,1\,0\,0\,0\,1 \;\begin{array}{l} \rightarrow\; x_1\, x_3\, x_1\, x_2 \\ \rightarrow\; x_2\, x_1\, x_1\, x_2 \end{array}$$

* * *

نلاحظ في المثال السابق أن كلمات الشفرة الثلاث المقابلة لـرموز المصـدر لا تتكون كلها من نفس العدد من الحروف، فالكلمة الأولى المقابلة للرمز x_1 تتكـون

من حرف واحد، بينما كل من الكلمتين الأخريتين تتكون من حرفين. والشفرة التي تتكون كل كلماتها من نفس العدد من الحروف ـ ويقال إن كل كلماتها لها نفس الطول ـ تسمى شفرة قالبية (block code) وكل كلمة تسمى قالب (block). وهذه الشفرات لها أهمية عملية في بعض التطبيقات.

أهمية الشفرات والحاجة إليها

من أهم التطبيقات التي نحتاج فيها إلى استخدام الشفرات تلك التي يلزمنا فيها تحويل معلومات المصدر من اللغة التي خرجت بها إلى لغة أخرى قبل نقلها وذلك للضرورة، ومن أمثلة ذلك:

(١) ضرورة استخدام اللغة الثنائية (binary language) لنقل المعلومات أو البيانات كما في:

أ. الحاسبات الالكترونية، حيث يُحوَّل برنامج الحاسب إلى مجموعات وتوافقات من الأرقام الثنائية.

ب. الاتصالات عن طريق النبضات (pulse width communication)، والتليفونات، وإرسال الرسائل بالتلغراف باستخدام شفرة مورس (Morse code telegraphy) (مثلاً حرف E يرمز له بالنقطة . ، وحرف B تستخدم له الرموز . . . ــ ، وحرف Q يرمز له هكذا ــ . ــ ــ).

(٢) الاتصالات السرية والعسكرية وعمليات التجسس.

ومن أهم أهداف استخدام الشفرات:

(١) زيادة كفاءة نظم الاتصالات بتقليل الإطناب فيها.

(٢) تقليل الأخطاء في عملية الإرسال والاستقبال، ومحاولة اكتشاف هذه

الأخطاء وتصحيحها، ومواجهة الضوضاء للتغلب عليها، وذلك بزيادة الإطناب قليلا، كما سنرى بإذن الله حين دراسة طرق صياغة الشفرات واكتشاف الأخطاء وتصحيحها.

ويلاحظ أن استخدام الحاسبات الرقمية على نطاق واسع قد أكد ضرورة وأهمية الحاجة إلى ابتكار أو استنتاج طرق للتحكم في الأخطاء التي تحدث عند استخدام اللغة الثنائية ـ وهي لغة الحاسبات الرقمية (الثنائية) ـ حيث تقوم اللغة على رقمين فقط (الصفر والواحد مثلاً)، فكل رقم ذو أهمية، ويجب أن تكون هناك عناية فائقة لمنع تغير هذا الرقم لأي سبب عرضي (مثلا من الصفر إلى الواحد أو العكس).

وهناك عدة طرق يمكن أن تتبع لتقليل هذه الأخطاء، مثل زيادة قدرة القناة أو قوتها الإرسالية (channel power) واستعمال حجاب حاجز قوى (heavy shielding) لتقليل تداخل الضوضاء، إلا أن هذه الطرق تكون عادة مكلفة. فبدلاً من ذلك تستعمل شفرات خاصة لاكتشاف الأخطاء وتصحيحها، وتقوم هذه الشفرات بإدخال قليل من الإطناب ـ وبالتالي تؤدي إلى تنقيص كفاءة إرسال المعلومات قليلاً ربما بنسبة تصل إلى نحو ١٠٪ ـ إلا أنه يمكن باستعمال هذه الشفرات استخدام قنوات أقل تكلفة مع الاعتماد عليها إلى درجة كبيرة (high reliability).

* * *

المثال التالي يوضح كيف أن استخدام الشفرات في ترجمة المعلومات يمكن أن يؤدي إلى زيادة الكفاءة أو تقليل الإطناب، وذلك عن طريق تقليل القيمة المتوسطة لطول كلمة الشفرة، والتي تعرف كما يلي:

تعريف: متوسط طول كلمة الشفرة

(Average Codeword Length)

نفرض أن رموز المصدر هي: $x_1, x_2, \dots\dots\dots, x_n$

وأن احتمالاتها على الترتيب هي: $p_1, p_2, \dots\dots\dots, p_n$

وأن أطوال (أي عدد رموز) كلمات الشفرة المقابلة لها في شفرة ما هي على الترتيب: $\ell_1, \ell_2, \dots\dots\dots, \ell_n$

فيكون متوسط طول كلمة الشفرة L هو: $L = \sum_{i=1}^{n} p_i \, \ell_i$

ملاحظة: متوسط طول كلمة الشفرة هو متوسط عدد رموز أو حروف كلمة الشفرة المقابلة للرمز الواحد من رموز المصدر.

وتصغير متوسط طول كلمة الشفرة لإرسال رسالة يعني زيادة كفاءة الإرسال كما يعني تقليل تكاليف إرسال الرسالة بفرض أن تكاليف الرمز الواحد متساوية لجميع الرموز.

مثال ٣ - ٢:

نفرض أن المطلوب إقامة نظام اتصالات بين مدينتين م، ت ، بحيث يرسل النظام حالة الطقس في المدينة م عند فترات زمنية معينة، ولا يستخدم النظام إلا الأجهزة الثنائية (on-off) . ويوصف الطقس بواحدة من الأربع حالات المحتملة: مشمس - رطب - غائم - ممطر. والجدول التالي يبين هذه الحالات واحتمال كل منها، وكلمة الشفرة المقابلة لكل حالة، وذلك لثلاث شفرات مختلفة A, B, C استخدمت لإرسال حالة الطقس، وسنقارن بإذن الله تعالى بين هذه الشفرات الثلاث لبيان أيها أقل تكلفة وأعلى كفاءة.

الرسالة	الاحتمال	الشفرة A	الشفرة B	الشفرة C
مشمس: x_1	$\frac{1}{2}$	00	0	0
رطب : x_2	$\frac{1}{4}$	01	10	10
غائم : x_3	$\frac{1}{8}$	10	110	110
ممطر : x_4	$\frac{1}{8}$	11	1110	111

نـلاحظ أن أي سلسلة ثنائيـة من الشفرة A أو الشفـرة B أو الشفرة C لا تُفك أي لا تعاد ترجمتها إلى سلسلة رسائل إلا بطريقة واحدة فقط وذلك لأنه:

أ) في الشفرة A : تقسم السلسلة الثنائية إلى مجموعات جزئية تتكون كـل واحدة منها من رقمين ثنائيين (2 binits) يقابلان رسالة معينة.

ب) في الشفرة B : نلاحظ أن كل سلسلة ثنائية مقابلة لرسالة ما ـ أي كـل كلمة شفرة ـ تنتهي بصفر عـلى اليمين، ولـذلك فيمكن النـظر إلى الصفر عـلى أنه علامة تدل على انتهاء كلمة شفرة.

حـ) الشفـرة C : هي نفس الشفرة B مـا عدا كلمـة الشفرة المقـابلة للرسـالـة x_4 حيث أنها 111 (في الشفرة C) بدلاً من 1110 ، ولذلك ففي أي سلسلة ثنائية يدل الصفر على انتهاء كلمة شفرة، وكل ثلاثـة آحاد متتـالية (111) تـدل على كلمة الشفرة المقابلة للرسالة x_4 .

وكمثال على ترجمة سلسلة رسائل متتابعة أو إعادة ترجمـة (أي فك) الشفـرة بالنسبة لسلسلة ثنائية، نذكر المثال التالي:

$$x_2\,x_1\,x_1\,x_4\,x_1\,x_2\,x_1\,x_3 \quad \xleftrightarrow{A} \quad 01000011\ 00010010$$

$$\xleftrightarrow{B} \quad 10001110010 0110$$

$$\xleftrightarrow{C} \quad 10001110100110$$

وللمقارنة بين هذه الشفرات فإننا نحسب متوسط طول كلمة الشفرة في كل حالة، والشفرة التي تعطى أقل متوسط تكون هي الشفرة الفضلى.

$$L = \sum_{i=1}^{n} p_i\, \ell_i$$

$$L_A = \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{8} \times 2 + \frac{1}{8} \times 2 = 2 \text{ binits/message}$$

$$L_B = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{8} \times 3 + \frac{1}{8} \times 4 = 1\,\frac{7}{8} \text{ binits/message}$$

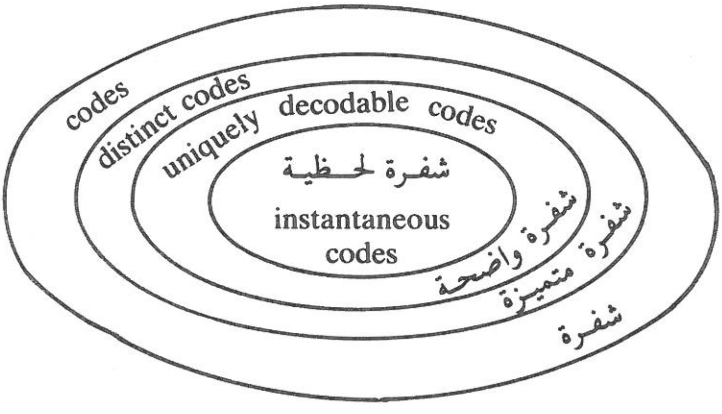
$$L_C = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{8} \times 3 + \frac{1}{8} \times 3 = 1\,\frac{3}{4} \text{ binits/message}$$

أي أنه يمكننا إرسال نفس المعلومات عن الطقس باستخدام $\frac{٣}{٤}$١ رقم ثنائي ـ في المتوسط ـ للرسالة الواحدة، وذلك باستخدام الشفرة C ، أو $\frac{٧}{٨}$١ رقم ثنائي/رسالة في حالة الشفرة B ، (بدلاً من رقمين ثنائيين/رسالة في حالة الشفرة A). أي أنه يمكننا توفير نحو $\frac{\frac{١}{٤}}{٢}$= ١٢,٥٪ ـ في المتوسط ـ من عدد الأرقام الثنائية/رسالة باستخدام الشفرة C (أو $\frac{\frac{١}{٨}}{٢} \cong$ ٦٪ باستخدام الشفرة B) وتقليل متوسط طول كلمة الشفرة يعني تقليل متوسط تكاليف إرسال الرسائل، كما يعني تقليل الإطناب أي زيادة الكفاءة.

أنواع الشفرات

الشفرة كما علمنا سابقاً هي ترجمة كل رسالة x_i من رسائل المصـدر إلى كلمة w_i تسمى كلمة شفرة مكونة من عدة رموز متتالية مختارة من مجموعة رموز تسمى مجموعة رموز الشفرة.

وهناك بعض الأنواع الخاصة للشفرات نذكرها فيما يلي:



الزمر الجزئية للشفرات

(subgroups of codes)

الشفرة المتميزة (distinct code)

هي الشفـرة التي تختلف فيهـا أي كلمـة من كلمات الشفـرة عن أي كلمــة أخرى

$$i \neq j \Rightarrow w_i \neq w_j$$

الشفرة الواضحة

"uniquely decodable (u.d.) or separable code"

هي الشفرة التي يمكن فيها إعادة ترجمة أي سلسلة متتالية من كلمات الشفرة إلى السلسلة المقابلة لها من رسائل المصدر بطريقة واحدة فقط.

وعكس هذه الشفرة تسمى الشفرة الغامضة أو المبهمة (ambiguous code)، وهي الشفرة التي يمكن أن تتم فيها عملية فك الشفرة أي إعادة الترجمة بأكثر من طريقة واحدة.

الشفرة اللحظية

"instantaneous code / irreducible code / code with the prefix property (p.p.)"

هي الشفرة التي لا يمكن فيها الحصول على أي كلمة شفرة بإضافة بعض الرموز إلى كلمة أخرى.

أي أنه ليست هناك أي كلمة شفرة تعتبر مقدمة أو سابقة (prefix) لكلمة أخرى من كلمات الشفرة.

وبأسلوب آخر فإن نهاية أي كلمة شفرة يمكن التعرف عليها (لحظياً) دون الحاجة إلى انتظار الرموز التالية من رموز الشفرة (لمعرفتها أولاً قبل تحديد انتهاء كلمة شفرة).

مثال ٣ ـ ٣ :

الجدول التالي يبين رموز مصدر معلومات X ، واحتمالات هذه الرموز،

وست شفـرات ثنـائيـة ممكنـة لـترجمـة رمـوز المصـدر إلى كلمات شفـرة من رمـوز المجموعة الأبجدية {0, 1}

(أ) حدد نوع كل من هذه الشفرات (أي حدد الـزمرة الجـزئية التي تنتمي إليهـا الشفرة).

(ب) احسب متوسط طول كلمة الشفرة بـالنسبة لكـل من الشفرات الـواضحة (u.d.) ، وبالتالي أوجد أقل الشفرات تكلفة.

المصدر		الشفرات					
الرمز	الاحتمال	A	B	C	D	E	F
x_1	0.5	0	0	0	0	1	0 0
x_2	0.25	0	1	1 0	0 1	0 1	0 1
x_3	0.125	1	0 0	1 1 0	0 1 1	0 0 1	1 0
x_4	0.125	1 0	1 1	1 1 1	0 1 1 1	0 0 0 1	1 1

الحـل:

(أ) نـلاحظ أن الشفرة A ليست متميـزة بينـما جميـع الشفـرات الأخـرى متميزة، حيث أن كلمتي الشفرة A الأولى والثانية منـطبقتان (أي غـير مختلفتين)، بينما أي كلمتي شفرة في أي شفرة أخرى غير الشفرة A مختلفتان.

ولذلك فإن شفرة مثـل الشفرة A لا يمكن أن تمثـل حروف المصـدر ومن ثم

فسوف تُستبعد من أي نقاش أو دراسات أو اعتبارات أخرى تالية حيث أن مثل هذه الشفرة ليس لها قيمة عملية.

كذلك نلاحظ أن الشفرات C, D, E, F كلها شفرات واضحة (.u.d) بينما الشفرة B ليست واضحة بل شفرة مبهمة وذلك لأن كلمة مثل 0 0 يمكن أن تترجم (أو تفك) على أنها تمثل إما الرسالة x_3 وإما الرسالتين المتتاليتين x_1 x_1 . ومن الممكن ألا يكون هناك أي التباس أو غموض في عملية فك الشفرة إذا كان هناك نوع من الفصل أو الفراغ بين كلمات الشفرة المتتالية. فمثلاً إذا رمزنا لهذا الفراغ أو الفصل بالرمز S فإن السلسلة x_1 x_1 تترجم إلى 0S 0S بينما x_3 تترجم إلى 00S . وفي هذه الحالة فإن كلمات الشفرة في الشفرة B يجب أن تصاغ كما يلي على الترتيب

0S, 1S, 00S, 11S

ويمكن اعتبار هذه الشفرة الآن شفرة بدون رمز للفصل أو الفراغ ولكنها شفرة ثلاثية أيْ تحتوي مجموعة الشفرة الأبجدية فيها على ثلاثة رموز 0, 1, S وليس رمزين 0, 1 أي أنها لم تعد تُعتبر شفرة ثنائية.

كذلك نلاحظ أن الشفرات C, E, F شفرات لحظية بينما الشفرة D ليست لحظية، وذلك لأن كلمة الشفرة المقابلة للرمز x_1 مثلاً تعتبر سابقة أي جزءاً أو مقدمة لكلمة الشفرة المقابلة للرمز x_2 أو بأسلوب آخر فإن الكلمة w_2 المقابلة للرمز x_2 تعتبر امتداداً للكلمة w_1 المقابلة للرمز x_1 (حيث الكلمة 1 0 امتداد للكلمة 0)

والشفرات اللحظية تسمح بأن تُجري عمليه فك الشفرة دون تأخير (delay) ناتج عن انتظار كلمات الشفرة التالية، بينما في الشفرات الواضحة (.u.d، غير اللحظية لا يمكننا فك سلاسل كلمات الشفرة على أساس كلمة بكلمة بمجرد وصول السلاسل حيث أنه في بعض اللحظات يجب أن ننتظر لنعرف ما هو

الرقم التالي قبل أن نحدد ما إذا كانت كلمة شفرة قد انتهت أم لا .

فمثلاً في حالة استعمال الشفرة D ، عندما نستقبل سلسلة الشفرة المقابلة لسلسلة رسائل المصدر x_4 x_2 x_3 ، أي عندما نستقبل السلسلة :

$$0\ 1\ 1\ \underline{\underline{0}}\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1$$

يجب أن ننتظر حتى نستقبل ونعرف الرقم الرابع قبل أن نستطيع أن نحدد ما إذا كانت الرسالة x_3 أم الرسالة x_4 هي التي أرسلت أولاً (فإن كان الرقم الرابع صفراً فإننا نعرف أن x_3 هي التي أرسلت أولاً وأما إن كان واحداً فإننا نعرف أن x_4 هي التي أرسلت أولاً لأنه لا توجد كلمة شفرة بالنسبة للشفرة D تبدأ بالرقم 1) .

وعموماً فإن التقيد بضرورة انتظار تمام استقبال سلسلة شفرة قبل إجراء عملية الفك أي إعادة الترجمة يسبب تأخيراً زمنياً (time lag) غير مرغوب .

نلخص فيما يلي نوع كل شفرة من الشفرات المعطاة :

الشفرة	F	E	D	C	B	A
نوعها	لحظية	لحظية	واضحة	لحظية	متميزة	عامة

(ب) بتطبيق قانون متوسط طول كلمة الشفرة

$$L = \sum_{i=1}^{n} p_i\ \ell_i$$

بالنسبة للشفرات الواضحة، نحصل على النتائج التالية :

الشفرة الواضحة	F	E	D	C
متوسط طول كلمة الشفرة L	2	$1\frac{7}{8}$	$1\frac{7}{8}$	$1\frac{3}{4}$

ومن هـذه القيم نجـد أن الشفـرة C هي أقـل الشفـرات تكلفـة حيث أنها تعطى أقل متوسط طول كلمة شفرة.

تعريف : الشفرة المثلى (Optimal code)

الشفرة المثلى أو أفضل شفرة هي الشفرة التي تحقق الشرطين التاليين :

(١) أنها شفرة لحظــية.

(٢) أنها تعطى أقل قيمة ممكنة (L_{min}) لمتوسط طول كلمة الشفرة بـالنسبة لمصـدر معين ذي توزيع احتمالي معين لعناصره.

تعريف : كفاءة الشفرة

(Efficiency of an encoding procedure)

هي نسبة القيمة الفعلية لمتوسط قيمة المعلومات بـالنسبة للرمـز الواحـد من رموز الشفرة إلى القيمة العظمى الممكنة لهذا المتوسط.

فـــإذا فرضنـــا أن

X	:	مجموعة رسائل المصدر.
H(X)	:	متوسط قيمة معلومات المصدر (بالنسبة للرسالة الواحدة).
L	:	متوسط طول كلمة الشفرة (بالنسبة للرسالة الواحدة)
D	:	عدد عناصر مجموعة رموز الشفرة.

فيكـــــون

H(X)/L	:	متوسط قيمة المعلومات بالنسبة للرمز الواحد من رموز الشفرة.
log D	:	أقصى قيمة ممكنة للمعلومـات بالنسبـة للرمز الواحد من رموز الشفرة.

وبالتالي تكون كفاءة الشفرة:

$$\eta_{coding} = \frac{H(X)/L}{\log D} = \frac{H\ (X)}{L.\log D}$$

تعريف: الإطناب النسبي في الشفرة:

(Relative redundancy of the code)

rel. redundancy $= 1 - \eta_{coding}$

ملاحظـة:

إذا أعـطينا مجمـوعة رسـائل مصـدرية وتـوزيعها الاحتـمالي ومجموعـة شفرة أبجدية، فإننا نـلاحظ أن كفاءة الشفـرة تتناسب عكسيـاً مع متـوسط طول كلمـة الشفرة

$$\eta_{coding} \quad \alpha \quad \frac{1}{L}$$

مثال ٣ ـ ٤ :

نفرض أن جهاز الإرسال يرسل الرسائل الأربع التالية بالاحتمالات المبينة . احسب كفاءة الشفرة بالنسبة للشفرات الواضحة المذكورة في مثال ٣ ـ ٣ .

$$\begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

الحــل :

$$\eta_{coding} = \frac{H(X)}{L \quad \log D}$$

$$D = 2$$
$$\log D = \log 2 = 1$$

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{4} p_i \log p_i$$

$$= -\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\log\frac{1}{4} - 2 \times \frac{1}{8}\log\frac{1}{8}$$

$$= 1\frac{3}{4} \text{ bits/symbol}$$

وباستخدام نتائج الجزء (ب) من مثال ٣ ـ ٣ والتي تعطى قيم متوسط طول كلمة الشفرة بالنسبة للشفرات الواضحة ، نجد أنه بالنسبة للشفرة C :

$$\eta_C = \frac{1\frac{3}{4}}{1\frac{3}{4} \times 1} = 1$$

$$= 100\ \%$$

وبالنسبة لكل من الشفرتين D, E :

$$\eta_{D,E} = \frac{1\frac{3}{4}}{1\frac{7}{8} \times 1} = 0.9333$$

$$= 93.33\%$$

وبالنسبة للشفرة F :

$$\eta_F = \frac{1\frac{3}{4}}{2 \times 1} = 0.875$$

$$= 87.5\%$$

ملاحظـات:

(١) نلاحظ من هذه النتائج أن الشفرة C شفرة مثلى وذلك لأنها شفرة لحظيـة كما أنها تعطي أقل قيمة ممكنة لمتوسط طول كلمـة الشفرة (وتصـل كفاءة الشفـرة فيها إلى قيمتها العظمى ١٠٠ ٪).

(٢) إذا لم نستخدم أيًا من الشفرات السابقة وأرسلنا عناصر المصدر كـما هي دون أن نصيغها بأي صورة أخرى، فيمكننـا أن نعتبر أننـا قد استخـدمنا الشفـرة المتماثلة التي تتماثل أو تنطبق فيها كلمة الشفرة المقابلة لرمز ما مع هذا الرمز، أي أن كلمة الشفرة المقابلة للرمز x_i هي x_i وذلك لجميع قيم i . وبالتالي فإن المجموعة الأبجدية للشفرة هي

$$\{ x_1, x_2, x_3, x_4 \}$$

أي أن:

$$D = 4$$

$$\log D = \log 4 = 2$$

$\ell_i = 1 \qquad i = 1, 2, 3, 4$

$L = 1$

$H(X) = 1\frac{3}{4}$ (كما سبق)

$$\eta = \frac{1\frac{3}{4}}{1 \times 2} = 0.875 = 87.5\%$$

ونلاحظ من هذا أن الشفرات C, D, E تؤدي إلى تحسين هذه الكفاءة، بينما الشفرة F لا تؤدي إلى أي تغيير في قيمتها.

(٣) بعد استخدام أي من الشفرات الثنائية ـ أي التي تحتوي مجموعتها الأبجدية على عنصرين فقط هما 0, 1 ـ فإنه يكون لدينا الآن مُرسِل جديد (ثنائي) يرسل أصفاراً وآحاداً باحتمالات محددة، حيث احتمال إرسال الصفر p(0) هو النسبة:

$$\frac{\text{متوسط عدد الأصفار في كلمة الشفرة}}{\text{متوسط عدد الأصفار والآحاد في كلمة الشفرة}}$$

أي يساوى

$$\frac{\text{متوسط عدد الأصفار في كلمة الشفرة}}{\text{متوسط طول كلمة الشفرة}}$$

فإذا فرضنا أن $\ell_{i,0}$ هو عدد الأصفار في كلمة الشفرة رقم i فإن:

$$p(0) = \frac{\sum_i p_i \, \ell_{i,0}}{\sum_i p_i \, \ell_i}$$

وبالتالي يكون احتمال إرسال الواحد p(1) هو: $p(1) = 1 - p(0)$

و بالمثل يمكن حساب $p(1)$ من العلاقة :

$$p(1) = \frac{\sum_i p_i \ell_{i,1}}{\sum_i p_i \ell_i}$$

حيث $\ell_{i,1}$ هو عدد الآحاد في كلمة الشفرة رقم i

مثال ٣ ـ ٥ :

احسب كـلاً من احتمال إرسـال الصفر $p(0)$ واحتـمال إرسال الـواحد $p(1)$ عند استخدام كل من الشفرات الواضحة المذكورة في مثال ٣ ـ ٣ .

الحـل :

أولاً : الشفرة C

x_i	p_i	c_i	ℓ_i	$\ell_{i,0}$	$\ell_{i,1}$
x_1	$\frac{1}{2}$	0	1	1	0
x_2	$\frac{1}{4}$	10	2	1	1
x_3	$\frac{1}{8}$	110	3	1	2
x_4	$\frac{1}{8}$	111	3	0	3

$$p(0) = \frac{1}{L} \cdot \sum_i p_i \ell_{i,0}$$

$$= \frac{4}{7}\left[\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{8} \times 1 + \frac{1}{8} \times 0\right] = \frac{1}{2}$$

$$p(1) = 1 - p(0) = \frac{1}{2}$$

ويمكن كذلك حساب p(1) من القانون الخاص به مباشرة

$$p(1) = \frac{1}{L} \sum_i p_i \ell_{i,1}$$

$$= \frac{4}{7} \left[\frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{8} \times 2 + \frac{1}{8} \times 3 \right] = \frac{1}{2}$$

نلاحظ أن المجموعة الأبجدية للشفرة تحتـوي على رمـزين {0, 1} وأن هذه الشفرة "C" تعطى نفس الاحتمال لكل من الرمزين، ولـذلك نحصـل على أقصى قيمة ممكنة للمعلومات بالنسبة للرمز الواحد، وتصل الكفاءة إلى ١٠٠٪.

ثانياً: الشفرة D

p_i	c_i	ℓ_i	$\ell_{i,0}$	$\ell_{i,1}$
$\frac{1}{2}$	0	1	1	0
$\frac{1}{4}$	01	2	1	1
$\frac{1}{8}$	011	3	1	2
$\frac{1}{8}$	0111	4	1	3

$$p(0) = \frac{1}{L} \sum_i p_i \ell_{i,0} = \frac{1}{L} \sum_i p_i = \frac{1}{L} = \frac{8}{15}$$

$$\therefore p(1) = \frac{7}{15}$$

ثالثاً: الشفرة E

c_i	ℓ_i	$\ell_{i,0}$	$\ell_{i,1}$
1	1	0	1
01	2	1	1
001	3	2	1
0001	4	3	1

نلاحظ أن هناك تشابهاً بين هذه الشفرة والشفرة D ، من حيث أن أطوال كلمات الشفرة المقابلة لرموز المصدر واحدة في الشفرتين (المجموعة ℓ_i لها نفس القيم) إلا أن هناك تبادلاً بين دورَى الصفر والواحد من ناحية العدد، أي أن المجموعتين $\ell_{i,1}$، $\ell_{i,0}$ تبادلتا قيمها، ولذلك فبالنسبة للشفرة E :

$$p(0) = \frac{7}{15} \quad , \quad p(1) = \frac{8}{15}$$

رابعاً: الشفرة F

p_i	c_i	ℓ_i	$\ell_{i,0}$	$\ell_{i,1}$
$\frac{1}{2}$	00	2	2	0
$\frac{1}{4}$	01	2	1	1
$\frac{1}{8}$	10	2	1	1
$\frac{1}{8}$	11	2	0	2

$$p(0) = \frac{1}{L} \sum_i p_i \ell_{i,0}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{8} \times 1 + \frac{1}{8} \times 0 \right] = \frac{11}{16}$$

$$\therefore p(1) = \frac{5}{16}$$

ملاحظـــة:

كما أشرنا قبل هذا المثال مباشرة فإنه بعد استخدام أي من هذه الشفرات الثنائية يمكن اعتبار أنه لدينا الآن مصدر ثنائي يرسل العنصرين 0, 1 بالاحتمالين $p(0), p(1)$ على الترتيب. وحيث أن

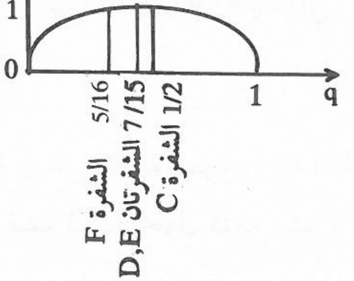
$$p(0) + p(1) = 1$$

فإذا رمزنا للاحتمال $p(0)$ بالرمز q فيكون $p(1) = 1 - q$

وتكون القيمة المتوسطة لمعلومات هذا المصدر هي

$$H(q) = -q \log q - (1-q) \log (1-q)$$

وتبلغ هذه القيمة أقصاها (وهي الوحدة) عند $q = \frac{1}{2}$ أي عندما يتساوي احتمال إرسال كل من الصفر والواحد، وهذا ما تحققه الشفرة C. ويمكن المقارنة بين الشفرات المختلفة بالنسبة لقيمة معلومات المصدر الثنائي بالرسم المبسط التالي لمنحنى العلاقة بين قيمة هذه المعلومات والاحتمال q .



إذا كانت أعداد مرات حدوث الرموز المختلفة في سلسلة ما من هذه الرموز غير متساوية، فإن هذه السلسلة تحتوي على درجة معينة من الإطناب. وبصياغة شفرة مناسبة لهذه الرموز يمكن التخلص من هذا الإطناب بحيث يمكن نقل نفس الرسالة بسلسلة أقصر، وبالتالي بتوفير أكثر من الناحية الاقتصادية في عملية الإرسال. ويمكن تحقيق ذلك عن طريق صياغة الرسائل الأكثر تكراراً برموز أقل زمناً في حدوثها (أي أن كلمات الشفرة المقابلة للرسائل كبيرة الاحتمالات تكون قصيرة الطول)، مع الاحتفاظ بالرموز الأكثر تعقيداً (كلمات الشفرة الطويلة) للرسائل النادرة أو الأقل حدوثاً.

فصياغة الشفرات لتقليل الإطناب يعني الترجمة إلى لغة أعلى كفاءة، وهذا يعني تقليل تكاليف إرسال الرسائل أي تحسين دالة التكاليف (cost function) والتي يمكن أن نفترضها متناسبة مع طول الرسالة، بفرض أن كل رمز يعطَى نفس العدد الثابت الذي يتناسب مع التكاليف وقد يكون هذا العدد هو الزمن الذي يستغرقه الرمز أو أي عامل آخر من عوامل التكاليف. فمن أهداف صياغة الشفرات العمل على تقليل تكاليف إرسال الرسائل.

فإذا فرضنا أن كل الرموز لها نفس التكاليف، فتصبح القيمة المتوسطة لتكاليف الرسالة الواحدة متناسبة مع القيمة المتوسطة لعدد رموز الرسالة (وهو ما يعبر عنه بطول الرسالة)، أي متناسبة مع متوسط طول الرسالة (متوسط طول كلمة الشفرة). فلكي تكون التكاليف أقل ما يمكن، يجب أن يكون متوسط طول كلمة الشفرة أقل ما يمكن. ومن هنا ينشأ السؤال التالي:

سؤال:

إذا أعطينا مجموعة رسائل X ، ومجموعة أبجدية تحتوي على عدد من الرموز يساوي D ، ما هي أقل قيمة لمتوسط طول كلمة الشفرة L يمكن الوصول إليها؟

الإجابة :

هناك نظرية تنص على أنه تحت شروط خاصة لطريقة صياغة الشفرة (أن تكون شفرة واضحة .u.d) فإن الحد الأدنى الذي يمكن الوصول إليه لمتوسط طول كلمة الشفرة هو

$$L_{min} = \frac{H\ (X)}{\log D}$$

أي أن :

$$L \geqslant \frac{H\ (X)}{\log D}$$

حيث H(X) هي القيمة المتوسطة لمعلومات مجموعة الرسائل المعطاة.

(انظر المسألة رقم ٣ ـ ٢٤)

ويلاحظ أنه عندما يصل متوسط طول كلمة الشفرة إلى هذا الحد الأدنى L_{min} فإن كفاءة الشفرة η تصل إلى قيمتها العظمى ١٠٠٪ وذلك لأن :

$$\eta = \frac{H(X)}{L\ \mathrm{Log}\ D}$$

بعض الشفرات الخاصة وطرق تكوينها

(Special Codes and Their Construction)

تمهيـد.

نفرض أن X تمثل مجموعة الرسائل المطلوب إرسالها
وأن P تمثل مجموعة احتمالات هذه الرسائل.

أي أن:

$$\begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_i & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_i & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

المطلـــوب:

أن نعين لكل رسالة x_i سلسلة أو متتابعة أو كلمـة شفرة c_i من أرقـام ثنائيـة (مثـل 1 ,0) وطول الكلمـة أي عدد رمـوزها ℓ_i غـير محـدد، بحيث تحقق الشفـرة الناتجة الشرطين التاليين:

(أ) أن تكون الشفرة لحظية.

(ب) أن تكون كفاءة إرسـال الرسـائل الثنـائية (أي الـرسائـل المشفرة أي بعـد ترجمتها إلى شفرة ثنائية) عالية.

وبـأسلوب آخر أن يـظهر الـواحد والصفـر مستقلين عن بعضيهما البعض وباحتمالين متساويين (تقريباً).

هذا الشرط يضمن إرسال وحدة معلومات واحـدة (تقريبـاً) مع كـل رقم من الرسائل المترجمة. (سنرى بإذن الله فيما بعد أنه في حالات معينة يكون ممكناً ضمان إرسال وحدة معلومات (1 bit of information) مع كـل رقم يرسل من الرسائل المترجمة، أي أنه من الممكن أن يظهر الـواحد والصفـر بنفس الاحتمال.

وفيما يلي ندرس بإذن الله تعالى طريقتين من طرق صياغة الشفرات التي تحقق الشرطين السابقين:

(١) الطريقة الاولى تسمى طريقة صياغة الشفرة اللحظية أو طريقة شانون ـ فانو.

(٢) الطريقة الثانية تسمى طريقة صياغة الشفرة المثلى أو الشفرة المتراصة أو طريقة هوفمان.

طريقة صياغة الشفرة اللحظية

Instantaneous Encoding Procedure

أو طريقة شانون ـ فانو

[Shannon-Fano (S-F) Encoding Procedure]

تتميز هذه الطريقة بأنه ينتج عن تطبيقها شفرات لحظية واضحة إلا أن متوسط طول كلمة الشفرة لا يصل عموماً إلى قيمته الصغرى (أي أنه أحياناً يصل إلى قيمته الصغرى L_{min} ولكن هذا غير مضمون عموماً).

خطوات الطريقة:

١ ـ رتب الرسائل أو الرموز ـ المطلوب ترجمتها ـ في قائمة ترتيباً تنازلياً حسب احتمالاتها.

٢ ـ قسِّم القائمة إلى قسمين: علوي وسفلي بحيث يكون مجموع احتمالات رسائل القسم العلوي تساوي ـ قدر الإمكان أي أقرب ما تكون إلى ـ مجموع احتمالات رسائل القسم السفلى.

٣ ـ اعط الرمز 0 لكل رسالة من رسائل القسم العلوي، والرمز 1 لكل رسالة من رسائل القسم السفلي.

٤ ـ قسِّم كلاً من القسمين (العلوي والسفلي) بدوره إلى قسمين كما سبق، أي بنفس الشرط المذكور سابقاً في الخطوة رقم ٢، ثم أعط الرمزين 0,1 كما هو مذكور في الخطوة رقم ٣.

٥ ـ استمر في هذه العملية المذكورة في الخطوة رقم ٤ (عملية التقسيم وإعطاء الرمزين 0,1) إلى أن يحتوي كل قسم على رسالة واحدة فقط.

مثال ٣ ـ ٦:

كوِّن شفرة ثنائية لحظية (بطريقة شانون ـ فانو) لمجموعة الرسائل التالية والمبينة مع احتمالاتها.

$$(X, P) \equiv \{ (x_1, 0.3), (x_2, 0.1), (x_3, 0.05), (x_4, 0.15), (x_5, 0.15), (x_6, 0.1), (x_7, 0.1), (x_8, 0.05) \}$$

الحـــل:

نبدأ أولا بإعادة ترتيب الرسائل بحيث تكون احتمالاتها في ترتيب تنازلي كما هو مبين في الجدول التالي:

عند تقسيم القائمة أول مرة إلى قسمين بحيث يكون كل قسم له نفس مجموع احتمالات العناصر قدر الإمكان، نلاحظ أنه يجب أن يشمل القسم العلوي الرسالتين x_1, x_4 فقط حيث مجموع احتماليهما 0.45 ومجموع احتمالات باقي الرسائل (في القسم السفلي) 0.55 (الفارق بين المجموعين 0.10)، بينما إذا أضفنا الرسالة x_5 إلى القسم العلوي بدلاً من السفلي يصبح مجموع احتمالات

x_i	p_i	c_i			
x_1	0.3	0	0		
x_4	0.15	0	1		
x_5	0.15	1	0	0	
x_2	0.1	1	0	1	
x_6	0.1	1	1	0	0
x_7	0.1	1	1	0	1
x_3	0.05	1	1	1	0
x_8	0.05	1	1	1	1

جدول الرسائل واحتمالاتها وكلمات الشفرة المقابلة لها

رسائل القسم العلوي 0.60 والسفلي 0.40 (الفارق بين المجموعين 0.20 وهذا أكبر من 0.10) . ثم نعطي كلاً من x_1, x_4 الرمز 0 وباقي الرسائل كلها الرمز 1 .

وعند تقسيم القسم العلوي إلى قسمين سيشتمل كل قسم على رسالة واحدة فقط تعطي العلوية 0 والسفلية 1 ، وبذلك لا يكون هناك أي تقسيم بعد هذا بالنسبة لهذا القسم العلوي، وتكون كلمة الشفرة المقابلة للرسالة x_1 هي 00 وكلمة الشفرة المقابلة للرسالة x_4 هي 01 .

وعند تقسيم القسم السفلي إلى قسمين سيشتمل القسم الأول (العلوي)

على الرسالتين x_5, x_2 ومجموع احتماليهما 0.25 ، بينما مجموع احتمالات رسائل القسم الثاني (السفلي) 0.30 وهكذا .

ويلاحظ أنه عند التقسيم التالي لهذا القسم الثاني فإما أن نقسمه إلى المجموعتين :

$$\{x_6, x_7\} \quad , \quad \{x_3, x_8\}$$

كما هو مبين في الحل في الجدول السابق، ومجموعا احتمالات رسائل المجموعتين هما على الترتيب :

$$0.2 \quad , \quad 0.1$$

وإما أن نقسمه إلى المجموعتين :

$$\{x_6\} \quad , \quad \{x_7, x_3, x_8\}$$

ومجموعا احتمالات رسائل المجموعتين هما على الترتيب :

$$0.1 \quad , \quad 0.2$$

فالفارق بين المجموعين في كلتي الحالتين يساوي 0.1 ، ولذلك فيمكن اتباع أي من التقسيمين، وسوف يؤديان في النهاية إلى حلين مختلفين أي إلى مجموعتين مختلفتين من كلمات الشفرة المقابلة للرسائل، ولكن متوسط طول كلمة الشفرة سيكون واحداً في الحالتين، كما سنبين ذلك إن شاء الله بعد قليل.

من الحل المبين بالجدول السابق يتضح لنا أن كلمات الشفرة الثنائية اللحظية التي حصلنا عليها والتي تقابل الرسائل مرتبة حسب ترقيمها المعطى في السؤال وليس حسب احتمالاتها هي :

الرسالة x_i	كلمة الشفرة c_i
x_1	0 0
x_2	1 0 1
x_3	1 1 1 0
x_4	0 1
x_5	1 0 0
x_6	1 1 0 0
x_7	1 1 0 1
x_8	1 1 1 1

ومتوسط طول كلمة الشفرة في هذا الحل يمكن حسابه بسهولة بالاستعانة بالجدول السابق كما يلي:

$$
\begin{aligned}
L &= \sum_{i=1}^{8} p_i \ell_i \\
&= 0.3 \times 2 + 0.15 \times 2 + 0.15 \times 3 + 0.1 \times 3 \\
&\quad + 0.1 \times 4 + 0.1 \times 4 + 0.05 \times 4 + 0.05 \times 4 \\
&= 2.85
\end{aligned}
$$

حل آخر: يمكن إيجاد شفرة أخرى لهذه المجموعة من الرسائل باتباع التقسيم الآخر ـ المشار إليه سابقاً ـ للمجموعة $\{x_6, x_7, x_3, x_8\}$ هكذا:

x_i	p_i	c_i				
x_1	0.3	0	0			
x_4	0.15	0	1			
x_5	0.15	1	0	0		
x_2	0.1	1	0	1		
x_6	0.1	1	1	0		
x_7	0.1	1	1	1	0	
x_3	0.05	1	1	1	1	0
x_8	0.05	1	1	1	1	1

ومتوسط طول كلمة الشفرة في هذا الحل هو:

$$\begin{aligned} L &= 0.3 \times 2 + 0.15 \times 2 + 0.15 \times 3 + 0.1 \times 3 \\ &\quad + 0.1 \times 3 + 0.1 \times 4 + 0.05 \times 5 + 0.05 \times 5 \\ &= 2.85 \end{aligned}$$

أي نفس القيمة التي نتجت عن الحل الآخر.

تعريـــــف:

يقـال الشفرتـين إنهما **مختلفتان اختـلافـاً شكليـاً إذا تسـاوت أطـوال كلمات** الشفرة المتقابلة في الشفرتين ـ أي تساوت عناصر **مجموعتي أطوال كلمات الشفـرة** ـ

ولكن قد تختلف بعض رموز الكلمات المتقابلة (مثل استبدال الرمزين $0 \leftrightarrow 1$)

أما إذا اختلفت عناصر مجموعتي أطوال الكلمات، فيقال للشفرتين إنهما مختلفتان اختلافاً جوهرياً.

فمثلاً مجموعة أطوال كلمات شفرة الحل الأول المقابلة لمجموعة الرسائل:

$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$

هي: $\{2, 3, 4, 2, 3, 4, 4, 4\}$

بينما مجموعة أطوال كلمات شفرة الحل الثاني المقابلة لنفس مجموعة الرسائل

هي:

$\{2, 3, \underline{\underline{5}}, 2, 3, \underline{\underline{3}}, 4, \underline{\underline{5}}\}$

ونظراً لاختلاف مجموعتي الأطوال فهاتان الشفرتان مختلفتان اختلافاً جوهرياً.

***

ملاحظـــــة:

كي تعطى هذه الطريقة (طريقة S-F) أكفأ شفرة ممكنة (شفرة كفاءتها ١٠٠٪)، فمن الضروري أن يكون في إمكاننا باستمرار تقسيم الرسائل - منذ بداية الطريقة وإلى نهايتها - إلى قسمين بحيث يكون مجموع احتمالات رسائل القسم العلوي يساوي بالضبط مجموع احتمالات رسائل القسم السفلي، وذلك إلى أن يشتمل كل قسم على رسالة واحدة فقط.

ومعنى هذا أن احتمال أي رسالة x_i يجب أن تكون صيغته

$$p_i = \frac{1}{2^{\ell_i}} \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots\ldots, n$$

حيث ℓ_i عدد صحيح موجب. والأعداد ℓ_i تحقق العلاقة

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{\ell_i}} = 1$$

لأن مجموع الاحتمالات = ١ . ومن الممكن أن تكون هناك عدة رسائل لها نفس الاحتمال، وفي هذه الحالة يكون العدد ℓ_i هو نفسه لكل من هذه الرسائل.

ولإثبات أن كفاءة مثل هذه الشفرة تصل إلى ١٠٠٪، نلاحظ أن:

$$p_i = \frac{1}{2^{\ell_i}} \equiv 2^{-\ell_i} \quad \Rightarrow \quad \log p_i = -\ell_i \quad \Rightarrow$$

$$L \equiv \sum_i p_i \ell_i = -\sum_i p_i \log p_i = H(X) \Rightarrow$$

$$\eta \equiv \frac{H(X)}{L \log D} = \frac{H(X)}{H(X). \log 2} = 1 = 100\%$$

أي أن الشفرة في هذه الحالة تكون شفرة مثلى لأنها لحظية ومتوسط طول الكلمة فيها أقل ما يمكن.

والمثال التالي يوضح هذه الحالة.

مثال ٣ ـ ٧:

باستخدام طريقة صياغة الشفرة اللحظية (S–F) كوِّن شفرة لحظية لمجموعة الرسائل التالية X والمذكورة مع احتمالاتها P . واحسب كفاءة الشفرة.

$$\begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

الحـــل:

الرسالة x_i	الاحتمال p_i	كلمة الشفرة c_i	طول كلمة الشفرة ℓ_i
x_1	$\frac{1}{4}$	0 0	2
x_2	$\frac{1}{4}$	0 1	2
x_3	$\frac{1}{8}$	1 0 0	3
x_4	$\frac{1}{8}$	1 0 1	3
x_5	$\frac{1}{16}$	1 1 0 0	4
x_6	$\frac{1}{16}$	1 1 0 1	4
x_7	$\frac{1}{16}$	1 1 1 0	4
x_8	$\frac{1}{16}$	1 1 1 1	4

$$L = \sum_i p_i \ell_i = 2 \times \frac{1}{4} \times 2 + 2 \times \frac{1}{8} \times 3 + 4 \times \frac{1}{16} \times 4$$

$$= 2\frac{3}{4}$$

$$H(X) = -\sum p_i \log p_i$$

$$= -2 \times \frac{1}{4} \log \frac{1}{4} - 2 \times \frac{1}{8} \log \frac{1}{8} - 4 \times \frac{1}{16} \log \frac{1}{16}$$

$$= 2\frac{3}{4}$$

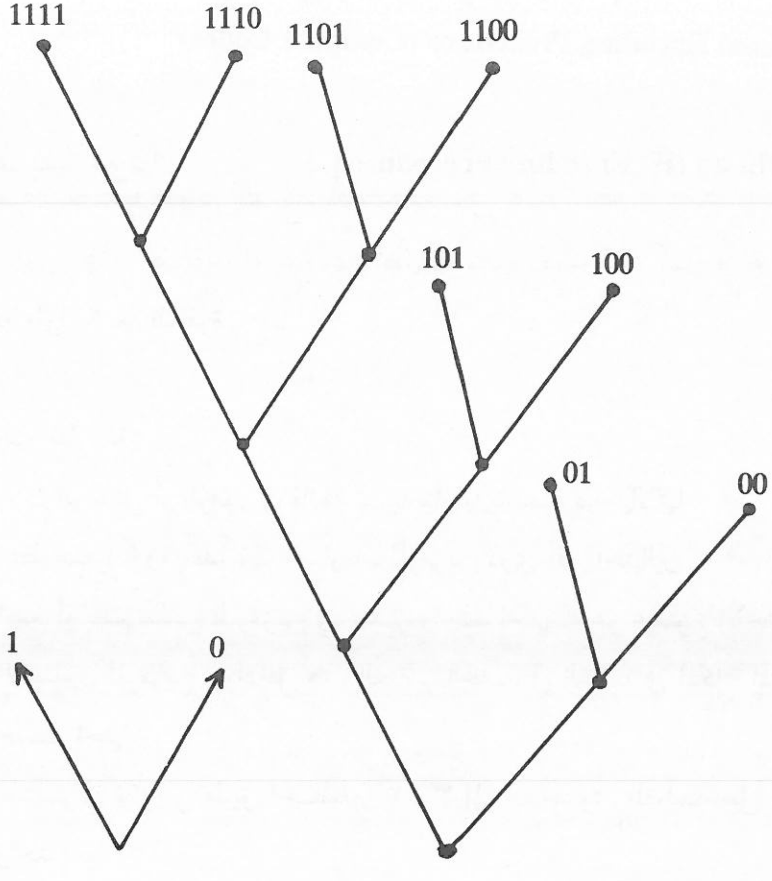
$$\eta = \frac{H(X)}{L \log D} = \frac{2.75}{2.75 \times 1} = 1 = 100\%$$

وهذه النتيجة متوقعة لأن احتمالات الرسائل كلهـا صيغتها $\frac{1}{2^{\ell_i}}$ حيث ℓ_i عدد صحيح.

شجرة الشفرة الثنائية

(Binary Code Tree)

كل شفرة ثنائية يمكن أن تمثل بشجرة ثنـائية كـما هو مبـين في الشكل التـالي لشفـرة المثال السـابق، حيث التحرك من مَفْـرِق أو عقدة (node) في الشجـرة إلى مفرق فوقه يضيف إما صفراً 0 أو واحداً 1 إلى السلسلة (sequence) عـلى حسب مـا إذا انتقلنا عـبر المسـار أو الفـرع (branch) الأيمن أو الأيسر عـلى الـترتيب. وتكون نقاط النهاية أو رؤوس (vertices) الشجرة هي كلمات الشفرة.



إذا كانت الشفرة لحظية فعنـد اقتفاء أثـر فروع الشجـرة من أصلها (أسفـل نقطة) إلى عقدة أو نقطة نهاية تمثل كلمة شفرة فيجب ألا نمر بعقدة (أو مفرق) تمثل كلمة شفرة، كما هو الحال في الرسم السابق الذي يمثـل شجرة شفـرة المثال ٣ ـ ٧ وهي شفرة لحظية.

طريقة صياغة الشفرة المثلى (أو الشفرة المتراصة)

Optimal Encoding Procedure (Compact Codes)

أو طريقة هوفمان [Huffman (H) Encoding Procedure]

تتميز هذه الطريقة بأنه ينتج عن تطبيقها شفرة لحظية ذات أقل قيمة ممكنة لمتوسط طول كلمة الشفرة.

خطوات الطريقة:

١- رتب الرسائل أو الرموز في قائمة ترتيباً تنازلياً بالنسبة لاحتمالاتها.

٢ - اعط صفراً 0 وواحداً 1 - اختيارياً - للرمزين ذوي أقل احتمالين.

٣ - اجمع أو ضم هذين الرمزين في عنصر واحد احتماله هو مجموع الاحتمالين الأصليين للرمزين، وأدخل هذا العنصر الجديد في القائمة في المكان المناسب حسب احتماله.

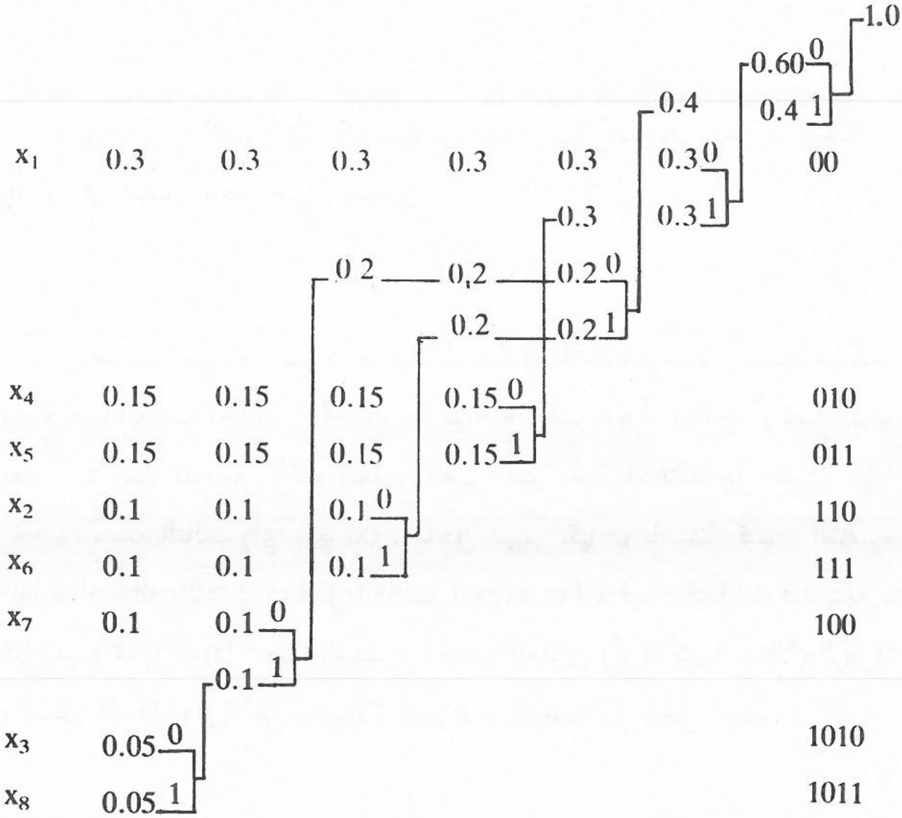
٤ - استمر في تكرير تطبيق الخطوتين ٢، ٣ إلى أن تحتوي القائمة على عنصر واحد فقط.

٥ - كلمة الشفرة المقابلة لأي رسالة أو رمز أصلي يمكن الحصول عليها بتتبع سلسلة الرموز الثنائية (الأصفار والآحاد) التي أعطيت لهذا الرمز الأصلي وتوابعه (وهي العناصر التي دخل هو في تكوينها بعمليات الضم أو الاتحاد).

مثـال ٣ - ٨:

أوجد شفرة لحظية متراصة (أي بطريقة هوفمان) لمجموعة الرسائل المعطاة مع احتمالاتها في مثال ٣ - ٦.

الحــل:



ومع استخدام هذه الطريقة تكون قيمة متوسط طول كلمة الشفرة:

$$
\begin{aligned}
L &= \sum_i p_i \ell_i \\
&= 0.3 \times 2 + (0.15 + 0.15 + 0.1 + 0.1 + 0.1) \times 3 \\
&\quad + (0.05 + 0.05) \times 4 \\
&= 2.8
\end{aligned}
$$

وبـالمقارنـة مع طـريقة (شـانون ـ فـانو) لصيـاغة شفـرة لحظيـة لنفس هذه المجموعة من الرسائل (انظر مثال ٣ ـ ٦) نجد أن

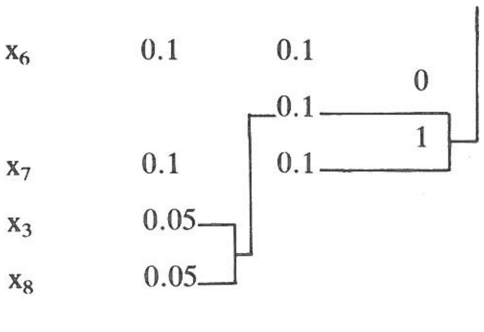
$$L_H = 2.8 < 2.85 \equiv L_{S-F}$$

* * *

يلاحظ عند تطبيق طريقة هوفمان في هذا المثال، أننا بدأنا بتجميع الرسالتين x_3, x_8 في عنصر واحد احتماله يساوي:

$$0.05 + 0.05 = 0.1$$

وهذا الاحتمال متكـرر في جدول الـرسائـل ثلاث مـرات، ولذلـك فيمكننا وضع هذا العنصر الجديد في أحد أربعة مواضع : قبـل x_2 أو بعد x_2 أو بعـد x_6 أو بعد x_7 ، وهذا الموضع الأخير (بعد x_7) هـو الذي اخـترناه عنـد حل المثـال. فإذا اخترنا الموضع الثالث (أي بعد x_6) ، فالحل سيبقى كما هو باستثناء كلمات الشفـرة المقابلة للرسائل الثلاث في ذيـل القائمـة (x_7, x_3, x_8) ، فهذه الكلمات قـد تتغير ـ كما يتضح مما يلي ـ إذا أعطينا باستمرار العنصر العلوي (أو الاكبر احتمالاً) الرمز 0 والعنصر السفلي (أو الاقل احتمالاً) الرمز 1 ، كما عملنا في الحل السابق.



كلمة الشفرة المقابلة للرسالة x_7 ستصبح 101 بدلاً من 100

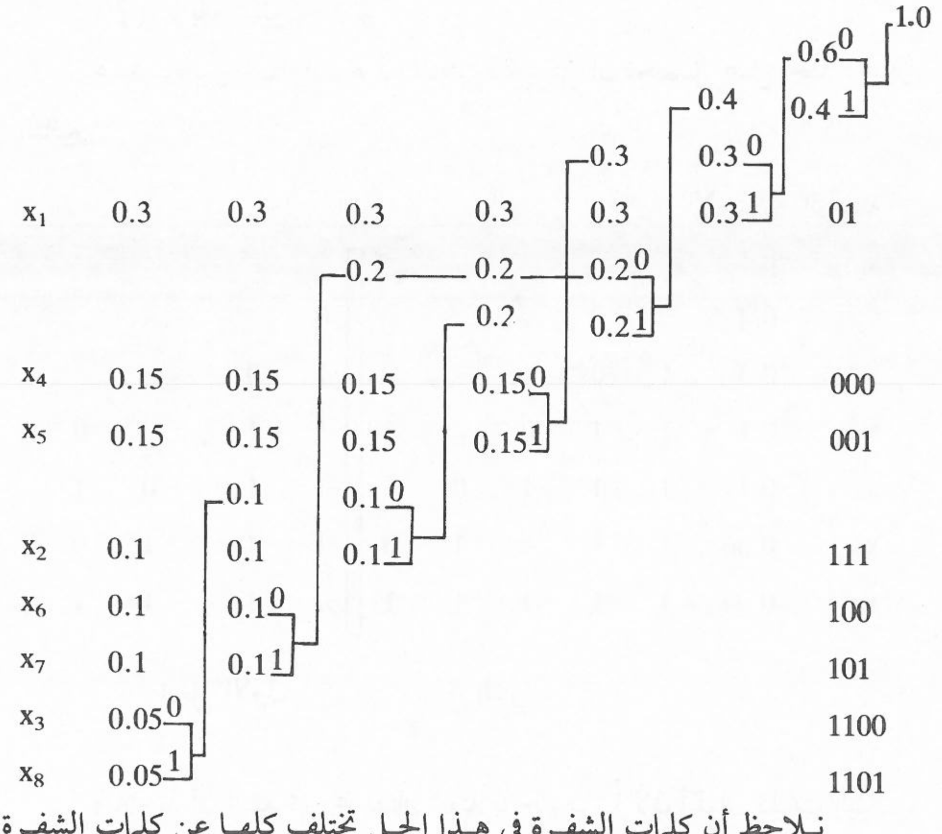
وكلمة الشفرة المقابلة للرسالة x_3 ستصبح 1000 بدلاً من 1010

وكلمة الشفرة المقابلة للرّسالة x_8 ستصبح 1001 بدلاً من 1011

أي أن أطوال هذه الكلمات لم تتغير وإنما تغـيرت بعض رموزهـا من 0 إلى 1 أو العكس. أما بقية الكلمات فتبقى كـما هي في الحل السـابق دون تغيير. ولـذلك فإن الشفرة الجديدة سوف تكون مختلفة عن الشفرة السابقة اختلافاً شكلياً فقط.

* * *

ويمكننا الآن أن نجرب حـلاً آخر نبـدأه بوضـع العنصر المركب في المـوضع الأول (قبل x_2).



نـلاحظ أن كلمات الشفـرة في هـذا الحـل تختلف كلهـا عن كلمات الشفـرة المقابلة لها في الحل الأول، إلا أن الاختلاف هنا بين الشفرتين اختلاف شكلي فقط لتساوي أطوال كلمات الشفرة المتقابلة.

مثال ٣ ـ ٩:

أوجد شفرة لحظية لرسائل المصدر التالي بطريقة:

(أ) شانون ـ فانو. (ب) هوفمان

رمز المصدر:	x_6 ،	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1
احتماله:	0.04 ،	0.06	0.1	0.1	0.3	0.4

الحـــل:

(أ) طريقة شانون ـ فانو

عنـد تـطبيق خـطوات هـذه الـطريقـة يمكن أن نحصـل عـلى أحـد الحلين التاليين.

الرسالة	الاحتمال									
x_i	p_i									
x_1	0.4	0					0			
x_2	0.3	1	0				1	0		
x_3	0.1	1	1	0			1	1	0	0
x_4	0.1	1	1	1	0		1	1	0	1
x_5	0.06	1	1	1	1	0	1	1	1	0
x_6	0.04	1	1	1	1	1	1	1	1	1

الحل الثاني **الحل الأول**

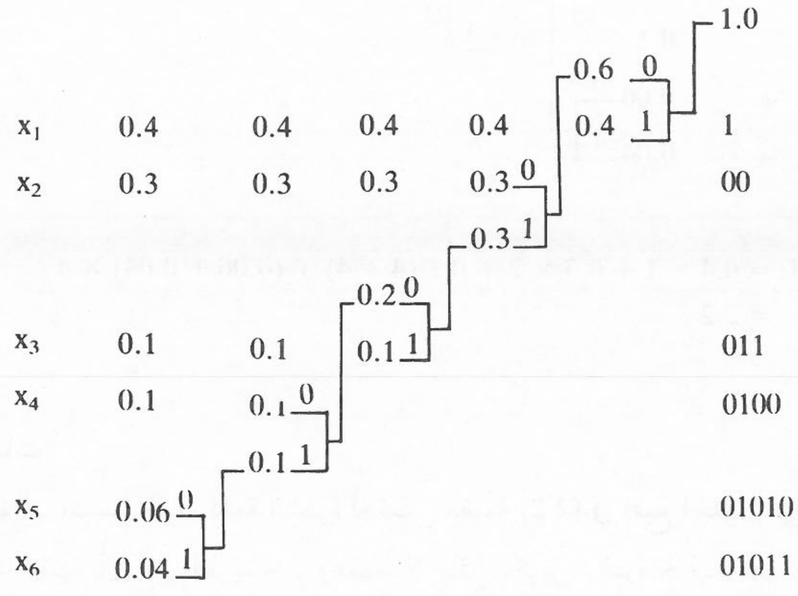
ونلاحظ أن الشفرتين مختلفتان اختلافاً جـوهريـاً لأن أطوال كلمات الشفـرة المتقـابلة ليست كلها متسـاوية، وكـما سبق أن ذكرنـا فكـلا الحلين يعـطيـان نفس متوسط طول كلمة الشفرة

$$L_I = 0.4 \times 1 + 0.3 \times 2 + 0.1 \times 4 + 0.1 \times 4 + 0.06 \times 4 + 0.04 \times 4$$
$$= 2.2$$
$$L_{II} = 0.4 \times 1 + 0.3 \times 2 + 0.1 \times 3 + 0.1 \times 4 + 0.06 \times 5 + 0.04 \times 5$$
$$\times 2.2$$

(ب) طريقــة هوفمـــان

الحـــل الأول

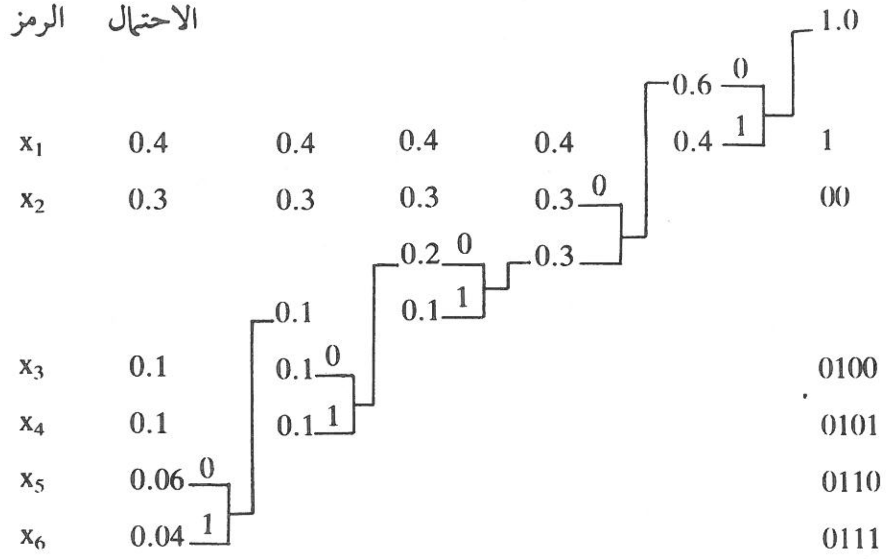
الرمز الاحتمال



$$L = 0.4 \times 1 + 0.3 \times 2 + 0.1 \times (3 + 4) + (0.06 + 0.04) \times 5$$
$$= 2.2$$

وفيما يلي حل آخر ـ باستخدام نفس الـطريقة ـ يعـطي شفرة أخـرى مختلفة اختلافاً جوهرياً عن هذه الشفرة لنفس المصدر.

الحل الثاني



$$L = 0.4 \times 1 + 0.3 \times 2 + 0.1\,(4 + 4) + (0.06 + 0.04) \times 4$$
$$= 2.2$$

ملاحظـــات:

- نلاحظ أن متوسط طول كلمة الشفرة له نفس القيمة (2.2) في جميع الحلول التي حصلنا عليها بأي من الطريقتين. وعموماً لا يمكن تكوين شفـرة لحظيـة لمصدر ما متوسط طول كلمتها أقل من المتوسط الذي تعطيه طريقة هوفـمان، وأحيانـاً ـ كما في هذا المثال ـ تعطى طريقة شانون فانو نفس المتوسط.

- نظراً لأن ترتيب إعطاء رمزي الشفرة 0,1 للرسائـل المختلفة في طـريقة هـوفمان أمـر اختياري فيمكن أن نتمم (أي نستبـدل $1 \leftrightarrow 0$) رقماً معينـاً (وليكن الـرقم الـذي ترتيبـه j في كل كلمـة من كلمات الشفرة، ونحصـل بذلـك على شفـرة

متراصة أخرى. فمثلاً إذا تممنا كلاً من الرقم الأول والرقم الأخير في شفرة الحل الأول (أي الرقم الذي في الموضع الأول من اليسار والرقم الذي في الموضع الخامس من اليسار) نحصل على شفرة مثلى (متراصة) أخرى كما هو مبين فيما يلي:

الشفرة الأصلية	الشفرة الجديدة
1	0
0 0	1 0
0 1 1	1 1 1
0 1 0 0	1 1 0 0
0 1 0 1 0	1 1 0 1 1
0 1 0 1 1	1 1 0 1 0

واضح أن الشفرتين (الأصلية والجديدة) مختلفتان اختلافاً شكلياً فقط (trivially different) حيث أن لهما نفس مجموعة أطوال الكلمات، بينما كل منهما مختلفة اختلافاً جوهرياً عن شفرة الحل الثاني (بطريقة هوفمان) لنفس المصدر.

شفرات اكتشاف الأخطاء وتصحيحها

Error-Dectecting and Error-Correcting Codes

تستخدم بعض الشفرات الخاصة لاكتشاف الأخطاء التي تحدث في عمليات إرسال المعلومات واستقبالها نتيجة وجود الضوضاء وعوامل أخرى، وكذلك لتصحيح هذه الأخطاء. وعادة تستعمل مثل هذه الشفرات في التطبيقات

التي تحتاج إلى وثوقية عالية (high reliability) بخصوص عمليتي الإرسال والاستقبال. ومن أمثلة هذه التطبيقات: الحاسبات الرقمية واسعة المدى (large scale digital computers)، ونظم التليفونات الأتوماتيكية (automatic tele-phone systems)، وفي المجال الجديد لذاتيات الحركة (automata). في مثل هذه التطبيقات يجب أن يحافظ على إرسال المعلومات بحيث تبقى خالية من الأخطاء لدرجة عالية جداً من الوثوقية والاعتماد عليها.

طريقة هامنج

نفرض أن مصدر المعلومات يرسل رسائل ثنائية، وأن القناة التي تُرسَل خلالها المعلومات قناة ثنائية متماثلة.

نفرض أن n : تمثل العدد الإجمالي لأرقام كلمة الشفرة.

m : تمثل عدد رموز أو أرقام المعلومات.

k : تمثل عدد الرموز التي تستخدم لاكتشاف أي خطأ وتصحيحه، ويطلق عليها رموز التحقق أو أرقام التحقق (check digits) أو رموز التحقق من النوعية (parity checks).

أي أن

$$n = m + k$$

أي أنه يمكننا أن نقول إن الاطناب أو الفَيْض النسبي R يحقق نوعاً ما العلاقة:

$$R \geqslant \frac{k}{n}$$

شفرة (هامنج) لاكتشاف الأخطاء الأحادية باستخدام رموز النوعية

[(Hamming's) single-error detecting code using parity checks]

هذه الشفرة تستخدم رمزاً واحداً فقط من رموز التحقق ،و رموز النوعية أي أن :

$$k = 1$$

وبالتالي فإن عدد رموز المعلومات m يعطي بالعلاقة

$$m = n - 1$$

حيث n هو عدد كل رموز كلمة الشفرة الواحدة.

وحيث أننا نتكلم عن الشفرات الثنائية فإن رمز النوعية يكون 0 أو 1 ويمكن أن نتفق على أن يأخذ رمز النوعية إحدى هاتين القيمتين 0 أو 1 بحيث يجعل العدد الإجمالي للآحاد في الرسالة الكلية أي في كلمة الشفرة كلها عدداً زوجياً، وتسمى الطريقة حينئذ طريقة التحقق من النوعية الزوجية (even parity check procedure) ، أو بحيث يجعل العدد الإجمالي للآحاد في كلمة الشفرة عدداً فردياً، وتسمى الطريقة في هذه الحالة طريقة التحقق من النوعية الفردية (odd parity check procedure) . ويمكن أن يوضع رمز التحقق من النوعية في أي موضع من مواضع رموز كلمة الشفرة ولكن من المعتاد أن يوضع في أقصى اليمين (وبذلك يكون على يساره n−1 رمز).

مثال ٣ ـ ١٠ :

فيما يلي مجموعتان من الرسائل أو كلمات الشفرة مع رموز التحقق من كل منُ النوعيتين الزوجية والفردية.

النوعية الزوجية (even parity)	النوعية الفردية (odd parity)
1 0 0 1 0 1 1	1 0 0 1 0 1 0
0 1 0 0 1 0 0	0 1 0 0 1 0 1
1 0 1 1 0 0 1	1 0 1 1 0 0 0
↑	↑
P	P
رمز النوعية	رمز النوعية

هـذه الشفـرة يمكن أن تكتشف خـطأ أحـاديـاً (single error) أي خـطأ في موضع واحد، وذلك لأنه إذا فرضنا مثلاً أننا اتبعنا النوعية الـزوجية، أي أن رمـز النوعية اختير بحيث يجعل العدد الكلي للآحاد زوجياً ، ثم حدث خـطأ في موضـع واحد فقط (في أي موضع من مواضع الرموز كلها وعـددها n) بـأن تحول 0 إلى 1 أو العكس، فإن العدد الكلي للآحاد يصبح فردياً، وبـالتالي عند استقبال الكلمـة سنكتشف حـدوث الخطأ لأن النـوعية الـزوجيـة تغـيرت. ولكن لا يمكن تحـديـد موضع هذا الخطأ الأحادي، وبالتالي لا يمكن تصحيحه.

كذلك فإن هذه الطريقة يمكن أن تكتشف حدوث عدد فـردي من الأخطاء ولكن لا تستـطيع تحـديد عـددها بـالضبط أو مـواضعهـا، وبـالتـالي لا تستـطيـع تصحيحها. إلا أن هذه الطريقة تؤدي إلى تحسن في جودة الإرسال والـوثوقيـة به، حيث أنها تزيد من احتمال اكتشاف الأخطاء.

طريقة (هامنج) لاكتشاف وتصحيح الأخطاء الأحادية (طريقة المسافات)

(Hamming's) single-error detection and correction method (distance method)

تعريـف :

نفرض أن جميع كلمات الشفرة الثنائية لها نفس الطول أي نفس العدد n من الأرقام .

تعرَّف المسافة d بين كلمتي الشفرة

$U = u_1\, u_2 \,\ldots\ldots\ldots\, u_n$,

$V = v_1\, v_2 \,\ldots\ldots\ldots\, v_n$

(حيث كل من الرمـزين أو الرقمـين $u_i, \ v_j$ يساوي 0 أو 1 ، وذلـك لجميع قيم i, j)

بأنها عدد المواضع i التي تختلف عندها قيمتا u_i, v_i .

ويمكن أن نعبر عن ذلك رياضياً بالعلاقة :

$$d\,(U, V) = \sum_{i=1}^{n} u_i \oplus v_i$$

حيث العلامة $\oplus$ تعني ما يلي :

$1 \oplus 0 = 1$

$0 \oplus 1 = 1$

$0 \oplus 0 = 0$

$1 \oplus 1 = 0$

أي أن $u_i \oplus v_i$ تساوي ١ إذا اختلفت قيمتا u_i, v_i وتساوي 0 إذا اتفقت قيمتاهما

وهذه الدالة d تحقق الشروط التالية:

$$d(U, V) = 0 \Longleftrightarrow U = V$$

إذا كان $U \neq V$:

$$d(U,V) = d(V,U) > 0$$

$$d(U, V) + d(V, W) \geqslant d(U, W)$$

فمثلاً إذا فرضنا أن:

$$U = 1\,0\,0\,1$$

$$V = 0\,1\,1\,0$$

$$W = 1\,0\,0\,0$$

فإن:

$$d(U,V) = 4, \quad d(V,W) = 3, \quad d(U,W) = 1$$

ونلاحظ تحقق العلاقات التالية:

$$4 + 3 > 1\,, \quad 1 + 4 > 3\,, \quad 1 + 3 = 4$$

* * *

إذا فرضنا أن أقل مسافة بين كلمتي شفرة من كلمات المصدر أو مجموعة الرسائل هي ٣، أي أنه

بين أي كلمتي شفرة: $d \geqslant 3$

فإذا حدث خطأ أحادي في إرسال كلمة، فإن كلمة الشفرة المستقبلة سوف تبعد بمسافة تساوي الوحدة $(d = 1)$ عن كلمة الشفرة الصحيحة، وبالتالي فإنه يمكننا معرفة كلمة الشفرة الصحيحة بإيجاد أقرب كلمة شفرة مسموح بها إلى الكلمة المستقبلة. وبالتالي فإن مثل هذا النظام يمكن أن يستخدم لاكتشاف وتصحيح الأخطاء الأحادية، كما يتضح من المثال التالي:

مثال ٣ ـ ١١ :

نفرض أن المصدر A يتكون من الرسالتين x_1، x_2 .

وأن كلمتي الشفرة المقابلتين لهما هما 000, 111 على الترتيب. أي أن طول كل منهما يساوي ٣، والمسافة بينهما تساوي ٣

$$n = 3, \quad d = 3$$

فإذا حدث خطأ أحادي في أي منهما فإننا نحصل على إحدى الكلمات التالية كما هو مبين مقابل كل من الرسالتين.

$$x_1: 0\,0\,0 \rightarrow 0\,0\,1, \quad 0\,1\,0, \quad 1\,0\,0$$

$$x_2: 1\,1\,1 \rightarrow 1\,1\,0, \quad 1\,0\,1, \quad 0\,1\,1$$

فإذا استقبلنا أياً من الكلمات 0 0 1, 0 1 0, 1 0 0 فإننا نفترض أن الكلمة 0 0 0 هي التي أرسلت.

وبالمثل إذا استقبلنا أياً من الكلمات 1 1 0, 1 0 1, 0 1 1 فإننا نفترض أن الكلمة 1 1 1 هي التي أرسلت، حيث أن المسافة بين هذه الكلمة 1 1 1 وبين أي من الكلمات الثلاث 1 1 0, 1 0 1, 0 1 1 تساوي ١ بينما المسافة بين الكلمة 0 0 0 وبين أي من هذه الكلمات الثلاث تساوي ٢ .

والآن يمكننا أن نعمم هذه الطريقة البسيطة (التي تتبع لاكتشاف وتصحيح الأخطاء الأحادية) لمسافات أكبر وأخطاء في مواضع أكثر.

أقل مسافة بين كلمتي شفرة (في مجموعة كلمات الشفرة)	اكتشاف الأخطاء أو التصحيح الممكن
١	عدم اكتشاف أو تصحيح أي أخطاء
٢	اكتشاف الأخطاء الأحادية
٣	تصحيح الأخطاء الأحادية
٤	تصحيح الأخطاء الأحادية، واكتشاف الأخطاء الثنائية
٥	تصحيح الأخطاء الثنائية
٦	تصحيح الأخطاء الثنائية، واكتشاف الأخطاء الثلاثية.

جدول المسافات واكتشاف الأخطاء وتصحيحها

مثـال ٣ ـ ١٢ :

إذا اشتملت مجموعة كلمات الشفرة على الكلمات التالية :

$$U = 1010100$$
$$V = 0110110$$
$$W = 0101000$$

فـإن :

$$d(U, V) = 3, \quad d(V, W) = 4, \quad d(U, W) = 5$$

وبذلك فإن أقل مسافة بـين كلمتي شفرة في هـذه المجموعـة هي $d_{min} = 3$ وبالتالي فبإرسال هذه المجموعة من كلمات الشفرة يمكن اكتشاف الأخطاء الأحادية وتصحيحها.

مثال ٣ ـ ١٣ :

نفـرض أن المسافـة بين أي كلمتـين من كلمات الشفرة عنـد مدخـل القنـاة تساوي ٢ على الاقل، أي أن

$$d \geqslant 2$$

حيث d هي المسافة بين أي كلمتي شفرة.

فإذا حدث خطأ أحادي ـ أيْ خـطأ في موضـع واحد فقط ـ في كلمـة شفرة نتيجة خطأ في الإرسال، فإن كلمة الشفرة المستقبلة (الخـاطئة) ستكـون كلمة بـلا معنى، حيث أنها لا توجد في قاموس الإرسال، وبالتـالي فإنـه من الممكن اكتشاف أي خطأ أحادي (ولكن ليس من الضروري تصحيحه، كما يتضح مما يلي).

إذا فرضنا أن لدينا مجموعة كلمات الشفـرة التاليـة (المجموعـة أ) بحيث أن المسافة بين أي كلمتين فيها تساوي ٢ بالضبط، أي أن $d = 2$

المجموعة أ	المجموعة ب
000	001
011	010
101	100
110	111

فإننا نـلاحظ أن أي خطأ أحـادي في أي كلمة في المجمـوعة أ ، ينتـج عنه كلمة في المجموعة ب

فمثلاً كل من الكلمات 1 0 1 ,1 1 0 ,0 0 0 (في المجموعة م) تُستقبَل 0 0 1 (وهي في المجموعة ب) نتيجة خطأ أحادي في كل من هذه الكلمات (في الموضع الأول من اليسار، والموضع الوسط، والموضع الأول من اليمين على الترتيب). وبالتالي فإننا إذا استقبلنا الكلمة 1 0 0 فإننا ندرك أن خطأ قد حدث لأن هذه الكلمة ليست موجودة في قائمة الكلمات المرسَلة (وهي قائمة المجموعة م) ولكننا لا نستطيع تصحيح الخطأ، أي لا نستطيع تحديد الكلمة المرسَلة بالضبط لأنها قد تكون أي واحدة من الكلمات الثلاث السابقة.

شفرة (هامنج) لتصحيح الأخطاء الأحادية (طريقة المعادلات)

[(Hamming's) single error correcting code]

لتصحيح خطأ أحادي في أي موضع من المواضع التي عددها m في كلمة شفرة، نحتاج إلى كميات أو قطع مستقلة من المعلومات (independent pieces of information) عددها $m + 1$ (واحدة لكل موضع من المواضع التي عددها m ، بالإضافة إلى واحدة لتبيِّن أنه لم يحدث أي خطأ). وإذا استخدمنا عدداً من رموز التحقق من النوعية يساوي k فمن الممكن أن يكون عندنا على الأكثر عدد من الكلمات المختلفة من كلمات النوعية (parity words) يساوي 2^k [لأن كل موضع من هذه المواضع التي عددها k يمكن أن يكون 0 أو 1 ، فمثلاً إذا كانت $k = 3$ فمن الممكن أن يكون لدينا الكلمات المختلفة الثمان (2^3) التالية:

$\{0\,0\,0, 0\,0\,1, 0\,1\,0, 0\,1\,1, 1\,0\,0, 1\,0\,1, 1\,1\,0, 1\,1\,1\}$

فإذا أردنا إجراء مقابلة واحد لواحد (one to one correspondence) بين كلمات النوعية ومواضع الخطأ، فإنه من اللازم أن تتحقق المتباينة

$2^k \geqslant m + 1$

فلإرسال الكلمة

$$U = u_1 u_2 \ldots\ldots\ldots u_m$$

نحسب كلمة التحقق من النوعية (parity-check word) المقابلة لها

$$u_{m+1} \; u_{m+2} \; \ldots\ldots\ldots \; u_n$$

ونرسل الكلمة الكليـــة

$$u_1 u_2 \ldots\ldots\ldots u_m u_{m+1} \ldots\ldots\ldots u_n$$

وعند جهة الاستقبال تتبع طريقة خاصة لتحديد المـوضع الـذي حدث فيـه خطأ أحادي ـ إن كان هناك خطأ ـ أو لبيان عدم حدوث أي أخطاء.

ويمكن توضيح هذه الطريقة بالمثال التالي الذي يبين كيفية تطبيقها.

مثال ٣ ـ ١٤ :

صَمِّم شفـرة لاكتشاف وتصحيـح الأخـطاء الأحـاديـة لقـوالب (blocks) تتكون كل منها من أربعة أرقام ثنائية (أي أن $m = 4$) .

الحـــل:

عدد رموز المعلومات (m) = ٤

وعدد رموز التحقق (من النوعية) = k

ونظراً لأنه يجب أن تتحقق العلاقة

$$2^k \geqslant m + 1 = 5$$

أي أن

$$k \geqslant \log_2 5$$

فإن أقل عدد ممكن من رموز التحقق المطلوبة k_{min} يعطى بالعلاقة

$$k_{min} = 3$$

(وذلك لأن العدد ٣ هو أصغر عدد صحيح يساوي أو يزيد عن $\log_2 5$ ، ومعلوم أن أي قيمة من قيم k - ومن بينها القيمة الصغرى k_{min} - يجب أن تكون عدداً صحيحاً لأن k تمثل عدد رموز التحقق).

ومعنى هذا أنه لإرسال أربعة أرقام للمعلومات نحتاج - على الأقل - إرسال ثلاثة أرقام تحقق معها (أي في كل قالب)، وبذلك فإن:

$$m = 4 \quad , \quad k = 3 \quad , \quad n = 7$$

فإذا فرضنا أن الرمز u_i يشير إلى الرقم (الثنائي) في الموضع رقم i من السلسلة U المكوَّنة من سبعة أرقام:

$$U = u_1\, u_2 \ldots u_i \ldots u_7$$

حيث u_1, u_2, u_3, u_4 هي أرقام المعلومات
بينما u_5, u_6, u_7 هي أرقام التحقق،

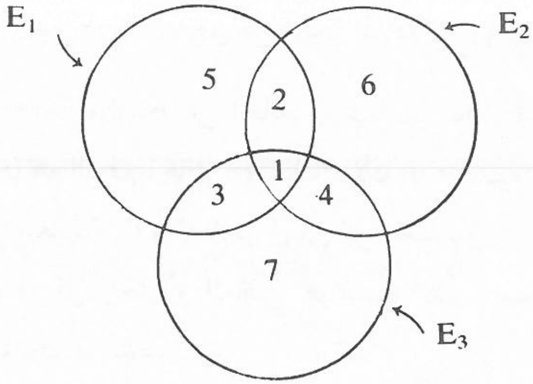
فإن أرقام التحقق يمكن الحصول عليها من المعادلات التالية [وأحياناً تسمى معادلات مقياسي أو عياري العدد ٢ (Modular 2 equations)].

$$u_1 + u_2 + u_3 \qquad + u_5 \qquad = \text{even} \qquad E_1$$

$$u_1 + u_2 \qquad + u_4 \qquad + u_6 \qquad = \text{even} \qquad E_2$$

$$u_1 \qquad + u_3 + u_4 \qquad + u_7 = \text{even} \qquad E_3$$

ويمكن تمثيل هذه المعادلات بالرسم التالي الذي يشبه تمثيل المجموعات



ومعنى هـذه المعادلات وطـريقة استخـدامها لاكتشـاف وتصحيح الأخـطاء الأحاديـة، أنه عند إرسال كلمة شفرة أو سلسلة مكونـة من سبعة أرقـام فإن رمـوز التحقق تُختار بحيث تحقق هذه المعـادلات (بمعلومية رمـوز المعلومات) وذلـك عند جهة الإرسال، ثم بعد استقبال هذه الكلمة أو السلسلة، يعـاد التحقق من صحة هذه المعادلات (أي عند جهة الاستقبال) فإن كـانت المعادلات كلهـا صحيحة أي متحققة فمعنى ذلك أنه لم يحدث أي خطأ (أحادي) وكل الرموز صحيحة، أمـا إن كانت هناك معادلة أو أكـثر خاطئـة فهذا يعني حدوث خطأ (أحادي)، وهذا يمكن معرفة موضعه بالضبط ـ وبالتالي تصحيحه ـ عن طريق معرفة المعادلة أو المعادلات الخاطئة كما سنبين ذلك بالتفصيل بعد قليل بإذن الله.

ونلاحظ أن المعادلة الاولى E_1 والتي تنص على أن يكون مجموع الأرقام u_1, u_2, u_3, u_5 عدداً زوجياً (لاحظ أن كل رقم هو إما صفر أو واحـد) تكفي لتحديـد رقم التحقق u_5 حيث أن أرقام المعلومات u_1, u_2, u_3 كلها معلومة.

وكذلك المعادلة الثانية E_2 تكفي لتحديد رقم التحقق u_6، وبـالمثل المعـادلة الثالثة E_3 تكفي لتحديد الرقم u_7 .

وبعـد استقبال أي كلمـة، وبفرض أنـه لم يحدث أكـثر من خطأ أحـادي في السبعـة أرقام، فـإنه يمكن معـرفة مـوضع الخـطأ بالضبط ـ إن كـان هناك خـطأ ـ وبالتالي تصحيحه، عن طريق التحقق من صحة المعادلات كما يلي:

إن كانت المعادلـة E_1 فقط هي الخاطئـة بينما المعـادلتان E_2, E_3 صحيحتـان فإن الرقم u_5 يكون هو الـرقم الخاطىء، وذلـك لأن u_5 هو الـرمز الـوحيد الـذي يـدخل في تكـوين المعادلـة E_1 ولا يظهـر في أي من المعـادلتـين E_2, E_3 ، فيكـون تغيُّر قيمته من صفر إلى واحد أو العكس هو سبب تغيُّر صحـة المعادلـة E_1 وبقاء المعادلتين E_2, E_3 صحيحتين.

وبالمثل إن كانت المعادلة E_2 فقط هي الخاطئة فإن الخطأ الأحادي يكـون في موضع u_6، وإن كانت المعادلة E_3 فقط هي الخاطئة فإن الرقم الخاطىء هو u_7 .

وإن كانت المعادلتان E_1, E_2 خاطئتين، أي لم تتحققا عند جهة الاستقبال، فمعنى ذلك أن قيمة الـرقم u_2 هي التي تغيرت في عمليـة الإرسال فـأدت إلى تغير صحة كل من المعـادلتين E_1, E_2 (لأن u_2 يـظهر في كـل منهما) وعـدم تغير صحـة المعادلة E_3 (لأن u_2 لا يظهر بها)، والرمز u_2 هو الرمز الوحيد الـذي يظهـر في كل من المعادلتين E_1, E_2 ولا يظهر في المعادلة E_3 .

وهكذا بالنسبة لباقي احتمالات صحة وخطأ المعادلات، ويمكننـا أن نلخص كل احتمالات الصحة والخطأ بـالنسبة للمعـادلات، والخطأ الأحادي ـ إن وجد ـ المقابل لكل من هذه الاحتمالات في الجدول التالي:

المعادلات الخاطئة	موضع الخطأ الأحـادي
E_1	u_5
E_2	u_6
E_3	u_7
E_1, E_2	u_2
E_1, E_3	u_3
E_2, E_3	u_4
E_1, E_2, E_3	u_1
لا توجد أي معادلة خاطئة	لا يوجد أي خطأ

جدول الصحة والخطأ للمعادلات والرموز

مثال ٣ ـ ١٥ :

(أ) نفرض أن المطلوب إرسال رسائـل المعلومات التـالية التي تتكـون كل منها من أربعة أرقام

1101, 0110, 1000, 1110

أوجد بطريقة هامنـج رموز التحقق التي تـرسل مـع كل من هـذه الرسـائل لاكتشاف وتصحيح الأخطاء الأحـادية.

(ب) نفرض أن طريقة هامنج المذكورة في المثال السابق قد اتبعت لإرسال كلمات الشفـرة، وأن الكلمة 1010100 قـد تم استقبالهـا، فهل تشتمـل هذه الكلمة على أي خـطأ أحادي أم لا؟ ومـا هي الكلمة المقـابلة التي أرسلت إن كان هناك خطأ؟

الحـــل:

(أ) بـاستخدام المعـادلات E_1, E_2, E_3 المذكـورة في المثال السـابق نوجـد أرقام التحقق u_5, u_6, u_7 على الترتيب، المقابلة لكل من الرسائل المعطاة، فنحصل على النتائج التالية:

الرسالة المعطاة		كلمة الشفـرة المرسَلة	
أرقام المعلومات		أرقام المعلومات	أرقام التحقق
1 1 0 1	→	1 1 0 1	0 1 0
0 1 1 0	→	0 1 1 0	0 1 1
1 0 0 0	→	1 0 0 0	1 1 1
1 1 1 0	→	1 1 1 0	1 0 0

مثلاً بالنسبة للرسالة الأولى ، تكون المعادلات المقابلة لها هي:

$$E_1 : 1 + 1 + 0 + u_5 = \text{even} \quad \Rightarrow \quad u_5 = 0$$

$$E_2 : 1 + 1 + 1 + u_6 = \text{even} \quad \Rightarrow \quad u_6 = 1$$

$$E_3 : 1 + 0 + 1 + u_7 = \text{even} \quad \Rightarrow \quad u_7 = 0$$

فتكون أرقام التحقق المقابلة للرسالة الأولى هي: 0 1 0

وبـالتـالي تكـون كلمـة الشفـــرة المـرسلة المقــابلة لهـذه الـــرســالـــة هي:

1 1 0 1 0 1 0

وبالمثل يمكن الحصول على كلمات الشفرة المقابلة للرسائل الأخرى.

(ب) لمعرفة إن كان هناك خطأ أحادي أم لا ـ وتحديد مـوضعه إن وجـد ـ في الكلمـة المستقبلة 1 0 1 0 1 0 0 نتحقق من صحة المعـادلات الثلاث $E_1, E_2,$ E_3 :

$$E_1 : u_1 + u_2 + u_3 + u_5 = 1 + 0 + 1 + 1 = 3 = \text{odd}$$

المعادلة E_1 خاطئة ⇦

$$E_2 : u_1 + u_2 + u_4 + u_6 = 1 + 0 + 0 + 0 = 1 = \text{odd}$$

المعادلة E_2 خاطئة ⇦

$$E_3 : u_1 + u_3 + u_4 + u_7 = 1 + 1 + 0 + 0 = 2 = \text{even}$$

المعادلة E_3 صحيحة ⇦

وبذلك فإن المعادلتين E_1, E_2 فقط خاطئتان، وبالتالي فمن جدول الصحـة والخطأ للمعادلات والرموز المـذكور في المثـال السابق يتبـين لنا أن الـرقم u_2 الذي قيمته 0 خاطىء، أي أن الكلمة المستقبلة بها خطأ أحادي، فالرقم u_2 كانت قيمته 1 عند الإرسال ولكنه وصل 0 عند الاستقبال، وبالتالي فـإن الكلمة الصحيحـة التي أرسلت هي : 1 1 1 0 1 0 0 ، ويمكن التحقق من صحة هذه النتيجة بالتأكد من أن المعادلات الثلاث E_1, E_2, E_3 تصبح الآن كلها صحيحة بالنسبة لهذه الكلمة.

تمرينـــات
الفصل الثالث

تمرينات رقم ٣

٣ ـ ١ صيغت مخرجات مصدر متقطع في رموز شفرية، وقد استخدمت الشفرات المختلفة التالية:

المصدر		الشفرات					
الرمز	الاحتمال	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
x_1	$\frac{1}{2}$	0	1	0	111	1	0
x_2	$\frac{1}{4}$	10	011	10	110	01	01
x_3	$\frac{1}{16}$	110	010	110	101	0011	011
x_4	$\frac{1}{16}$	1110	001	1110	100	0010	0111
x_5	$\frac{1}{16}$	1011	000	11110	011	0001	01111
x_6	$\frac{1}{16}$	1101	110	111110	010	0000	011111

أ) أي هذه الشفرات واضحة (u.d.) ؟

ب) أي هذه الشفرات لحظية (p.p.) ؟

حـ) أوجد متوسط طول كلمة الشفرة بالنسبة لكل شفرة واضحة.

د) هل تعطى أيٌّ من الشفرات السابقة أصغر متوسط طول ممكن لكلمة الشفرة؟

هـ) بالنسبة لكل من الشفرات غير الواضحة (الشفرات المبهمة) أعط مثالاً لمجموعة من الرموز المتتابعة من الأصفار والآحاد والتي يمكن فك شفرتها بأكثر من طريقة واحدة.

٣ ـ ٢ صغ شفرة لحظيَة بطريقة شانون ـ فانو وشفرة مثلى بطريقة هوفمان للمصدر التالي، وقارن بين متوسطي طول كلمة الشفرة وكذلك بين كفاءتي الطريقتين:

$$\begin{pmatrix} X \\ \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 0.41 & 0.17 & 0.17 & 0.17 & 0.08 \end{pmatrix}$$

٣ ـ ٣ أنشىء شفرتين متراصتين (compact) مختلفتين اختلافاً جوهرياً (non-trivially different) ـ أي أن مجموعتي أطوال كلمات الشفرة مختلفتان ـ وذلك للمصدر $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ الذي احتمالات عناصره هي $P = \{0.55, 0.15, 0.15, 0.10, 0.05\}$ وارسم شجرة الشفرة الثنائية لكل من الشفرتين.

٣ ـ ٤ أوجد أقل متوسط طول كلمة شفرة لحظية للمصدر

$$X = \{x_1, x_2, \ldots.., x_7\}$$

الذي احتمالات عناصره هي:

$$\{p(x_i)\} = \{0.4, 0.08, 0.2, 0.08, 0.08, 0.04, 0.12\}$$

قارن بين هذه القيمة الصغرى الممكنة لمتوسط طول كلمة الشفرة والقيمة المتوسطة لمعلومات المصدر (source entropy).

٣ ـ ٥ طبِّق طريقة تجزئة ثلاثية (مماثلة للتجزئة الثنائية في طريقة شانون ـ فانو) لصياغة شفرة للرسائل التالية باستخدام المجموعة الأبجدية $\{0, 1, 2\}$.

وأوجد متوسط طول كلمة الشفرة وكفاءة الشفرة، وقارن هاتين القيمتين بالقيمتين المناظرتين في حالة التجزئة الثنائية.

$$\{m\} = \{m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4,\ m_5,\ m_6\}$$

$$\{p\ (m)\} = \{\tfrac{3}{8},\ \tfrac{1}{6},\ \tfrac{1}{8},\ \tfrac{1}{8},\ \tfrac{1}{8},\ \tfrac{1}{12}\}$$

٣ ـ ٦ افرض أن لدينا مصدرين متقطعين عديمي الذاكرة. المصدر الأول يستخدم مجموعة أبجدية من ستة حروف احتمالاتها هي:

0.3, 0.2, 0.15, 0.15, 0.1, 0.1

والمصدر الثاني يستخدم مجموعة أبجدية من سبعة حروف احتمالاتها هي:

0.3, 0.25, 0.15, 0.1, 0.1, 0.05, 0.05.

أنشىء شفرة مثلى ثنائية وشفرة مثلى ثلاثية لكل من مجموعتي الرسائل. أوجد متوسط عدد حروف الشفرة لكل حرف من حروف المصدر في كل من الشفرتين.

ملاحظة: في طريقة صياغة شفرة مثلى حيث عدد رموز الشفرة يساوي D نبدأ بتجميع عدد من الرسائل يساوي $2 + R_{D-1}\ (n-2)$ حيث n هو عدد رموز المصدر، و $R_{D-1}\ (n-2)$ هو الباقي عند قسمة $n - 2$ على $D - 1$.

٣ ـ ٧ **نظرية شفرية** (A Coding Theorem) : إذا حققت الأعداد الصحيحة المتباينة: $l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_n$

$$\sum_{i=1}^{n} D^{-l_i} \leqslant 1 \qquad \text{(Kraft Inequality).}$$

فإنه توجد شفرة لحظية مصاغة من مجموعة أبجدية عدد رموزها D، وأطوال كلمات الشفرة فيها هي هذه الأعداد الصحيحة.

وبالعكس فإن أطوال كل شفرة لحظية تحقق المتباينة السابقة.

[ملاحظة: النظرية لا تنص على أن أي شفرة تحقق أطوالها هذه المتباينة تكون شفرة لحظية].

i) ما هي أصغر قيمة ممكنة لعدد رموز المجموعة الأبجدية للشفرة D إذا أردنا صياغة شفرة لحظية مكونة من أربع كلمات طول كل منها ٢ وخمس كلمات طول كل منها ٤.

ii) نفرض أن N_i تمثل عدد كلمات الشفرة التي طول كل منها يساوي i. حقِّق ما إذا كان من الممكن أن تقابل كل من المجموعتين التاليتين شفرة ثنائية لحظية أم لا:

أ) $\{N_1, N_2, N_3, N_4\} = \{0, 2, 3, 2\}$

ب) $\{N_1, N_2, N_3, N_4, N_5\} = \{0, 2, 2, 2, 5\}$

٣ ـ ٨ أعطيت مجموعة الرسائل التالية واحتمالات الإرسال المقابلة لها:

$$X = \{x_1, x_2, x_3\} \ , \ P = \{\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\}$$

i) صغ شفرة ثنائية لحظية بحيث يكون متوسط طول كلمة الشفرة فيها أقل ما يمكن، واحسب كفاءة الشفرة.

ii) ثم اعتبر مصدرا X^2 (يسمى الامتداد ذو الرتبة الثانية للمصدر X) يرسل الرسائل

$$\begin{bmatrix} X_1X_1 & X_1X_2 & X_1X_3 \\ X_2X_1 & X_2X_2 & X_2X_3 \\ X_3X_1 & X_3X_2 & X_3X_3 \end{bmatrix}$$

صغ شفرة ثنائية لحظية بحيث يكون متوسط طول كلمة الشفرة فيها أقل ما يمكن، واحسب كفاءة الشفرة وقارنها بالكفاءة السابقة في الجزء i).

ملاحظة: زيادة الكفاءة بصياغة شفرة للمجموعة X^2 تكون على حساب بساطة الشفرة وسرعة فكها حيث أن الشفرة الجديدة (للمجموعة X^2) تكون أكثر تعقيداً وتسبب تأخيراً أكثر في عملية فك الشفرة (decoding).

٣ ـ ٩ احسب قيمة أكبر كفاءة شفرة ثنائية لحظية يمكن الوصول إليها عملياً بالنسبة لمصدر معلومات يرسل خمسة رسائل $\{X_1, X_2, \ldots, X_5\}$ احتمالاتها هي: $\{0.3, 0.25, 0.1, 0.25, 0.1\}$ على الترتيب. أوجد كذلك كلمات هذه الشفرة.

٣ ـ ١٠ نفرض أن مصدراً للمعلومات يصدر الرسائل التالية بالاحتمالات المبينة:

$$\begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 & X_7 & X_8 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

أ . المطلوب صياغة شفرة ثنائية لحظية لهذا المصدر بطريقة (شانون ـ فانو) ثم بطريقة (هوفمان)..

ب. ما هي قيمة متوسط طول كلمة الشفرة وقيمة كفاءة الشفرة في كل حالة؟ أي الطريقتين تعطى كفاءة أعلى؟

حـ . هل الشفرتان منطبقتان أم مختلفتان؟ وإذا كانتا مختلفتين، فهل الاختلاف جوهري أم شكلي فقط؟

٣ ـ١١ نفرض أن احتمالات إرسال عناصر المصدر X تحقق الشرط التالي:

$$(١) \quad \left\{ p(x_i) = \frac{1}{2^{\ell_i}}, \ i = 1, 2, \ldots, n; \ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{\ell_i}} = 1 \right\}$$

حيث ℓ_i عدد صحيح.

ونفرض أنه أمكن صياغة شفرة لحظية ثنائية لعناصر هذا المصدر بحيث أن:

{كلمة الشفرة المقابلة للعنصر X_i طولها يساوي ℓ_i} (٢)

المطلوب إثبات أن كفاءة مثل هذه الشفرة تساوي ١٠٠ ٪.

ملاحظة: من المعلوم أنه إذا وُجد مثل هذا المصدر X الذي يحقق الشرط (١) فإن طريقة (شانون ـ فانو) لصياغة الشفرة اللحظية الثنائية تحقق الشرط (٢) وبالتالي فإن كفاءة هذه الطريقة مع مثل هذا المصدر تصبح ١٠٠٪.

٣ ـ١٢ (أ) المصدر س يرسل الرسائل {a, b, c, d} بالاحتمالات التالية على الترتيب: $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}\}$.

فهل يحدث تغيير في الكفاءة إذا استخدمت الشفرة التالية A في عملية الإرسال (بدلاً من إرسال الرسائل كما هي دون تحويلها إلى أي شفرة)؟

الشفرة A

$a \rightarrow 00$

$b \rightarrow 01$

$c \rightarrow 10$

$d \rightarrow 11$

(ب) أعد حل الجزء (أ) من السؤال باستخدام الشفرة S- F (شانون ـ فانو) بدلاً من الشفرة A.

٣ـ ١٣ نفرض أن المصدر ص المعرف بالعناصر التالية واحتمالاتها:

y_i :	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}
p_i :	0.18	.17	.16	.15	.10	.08	.05	.05	.04	.02

سوف تستخدم معه طريقة (هوفمان) لصياغة شفرة لحظية لعناصره قبل إرسالها. فهل الأكفأ أن تستخدم شفرة ثنائية باستخدام مجموعة الرموز {0, 1} أم شفرة رباعية باستعمال الرموز {0, 1, 2, 3} ولماذا؟

٣ـ ١٤ ما هي قيمة أكبر كفاءة شفرة لحظية يمكن الوصول إليها عملياً لمصدر يرسل ثمانية عناصر احتمالاتها هي:

$$\{0.4,\ 0.2,\ 0.1,\ 0.1,\ 0.05,\ 0.05,\ 0.05,\ 0.05\}$$

وما هي كلمات هذه الشفرة، علماً بأن الشفرة:

أ) ثنائية. ب) ثلاثية.

٣ـ ١٥

أ) يقوم الحاسب بعمل شفرة ثنائية متميزة لمجموعة حروف اللغة العربية {أ،ب، ت، . . . ، هـ، و، ي} بحيث تكون كل كلمات الشفرة الثمانية والعشرين متساوية الأطوال (أي أن الشفرة ثابتة الطول) فما هو أقل طول ممكن؟ ولماذا؟

ب) ما هو أقل طول ممكن لشفرة ثنائية متميزة ثابتة الطول لمجموعة الأرقام العشرية {0, 1, 2, ..., 8, 9}؟.

جـ) كوِّن شفرة ثنائية لحظية (بطريقة S-F) لمجموعة الأرقام العشرية السابقة

بفرض أن المصدر يرسل هذه العناصر (الأرقام العشرية) بنفس الاحتمالات.

ء) اعمل أقل تعديل ممكن في الشفرة السابقة في حـ) بحيث تصبح شفرة ثابتة الطول، ولكن تظل شفرة لحظية (ومتميزة).

٣ـ ١٦ يرسل مصدر المعلومات م١ ستة عناصر بالاحتمالات {.3, .2, .1, .1, .1, .15, .15} ويرسل المصدر م٢ سبعة عناصر بالاحتمالات {.3, .25, .15, .1, .05, .05, .1, .1} المطلوب : لكلٍ من المصدرين :

ﺃ) كوِّن شفرة ثلاثية لحظية باستخدام الرموز {0, 1, 2} بحيث يكون متوسط طول كلمة الشفرة أقل ما يمكن.

ب) كوِّن شفرة لحظية بحيث يكون متوسط طول كلمة الشفرة أقل ما يمكن، وبحيث يكون الحرف الأول في كل كلمة شفرة 0 أو 1، بينما أي حرف آخر في الكلمة يكون 0 أو 1 أو 2. هل يمكن استنتاج قاعدة عامة لتكوين شفرة لحظية تتحقق فيها هذه الشروط؟

٣ـ ١٧ المصفوفة التالية تعطى الاحتمالات المشتركة لعناصر المجموعة (X,Y) حيث:

$$(X,\ Y) = \{x_1y_1, x_1y_2, x_1y_3, x_2y_1, x_2y_2, x_2y_3\}$$

$$P\ (X,\ Y) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.4 & 0.03 & 0.03 \\ 0.05 & 0.09 & 0.4 \end{pmatrix} \end{array}$$

المطلوب صياغة شفرة ثنائية لهذه المجموعة باستخدام كل من الطريقتين التاليتين، ثم حساب متوسط طول كلمة الشفرة في كل حالة، والمقارنة بين كفاءتي الطريقتين.

الطريقة الأولى: اتباع طريقة (هوفمان) لإيجاد شفرة للمجموعة X ، وشفرة أخرى مستقلة للمجموعة Y ، ثم تكوين كلمات شفرة المجموعة (X,Y) بمجرد وضع كلمات شفرة المجموعة Y يمين الكلمات المقابلة لشفرة المجموعة X. فمثلاً إذا كانت 11 هي كلمة الشفرة التي تقابل x_1 وكانت 010هي كلمة الشفرة التي تقابل y_2 ، فتكون 11010 هي كلمة الشفرة التي تقابل x_1y_2 .

الطريقة الثانية: اتباع طريقة (هوفمان) لإيجاد شفرة المجموعة (X,Y) مباشرة.

٣ ـ ١٨ إذا أُعطينا مجموعة كلمات شفرة ما W فيمكن معرفة ما إذا كانت الشفرة واضحة (uniquely decodable) أم لا باتباع خطوات الخوارزم (Algorithm) التالي:

١. كوِّن مجموعة جديدة S من عناصر نحصل عليها بالطريقة التالية:
قارن بين كل كلمتين من كلمات الشفرة في المجموعة المعطاة W، فإذا وجدت أن كلمة ما هي امتداد لكلمة أخرى فضع في قائمة المجموعة S ـ كأحد عناصرها ـ الرموز الزائدة (أي التي تضاف إلى الكلمة الصغرى لتعطي الكلمة الكبرى) [مثلاً: إذا وجدنا كلمتي الشفرة 01100 , 01 فإننا نضم إلى المجموعة S العنصر 100]. ولا تكرر أي عنصر ظهر في المجموعة S.

٢. إذا ظهر في المجموعة S عنصر عبارة عن كلمة شفرة فإن الشفرة تكون غير واضحة.

٣. قارن بين كل كلمتين: واحدة من المجموعة S وواحدة من المجموعة W، فإذا وجدت أن إحداهما امتداد للأخرى فضع الرموز الزائدة عنصراً جديداً في المجموعة S، وأيضاً لا تكرر أي عنصر ظهر سابقاً.

٤ . استمر في تطبيق الخطوة السابقة مع كل عنصر جديد يضاف إلى المجموعة S إلى حين عدم إمكانية إضافة أي عنصر جديد إلى المجموعة S وفي هذه الحالة تكون الشفرة واضحة، أو إلى حين ظهور كلمة شفرة عنصراً في المجموعة S وفي هذه الحالة تكون الشفرة غير واضحة.

أ) اتبع الخطوات السابقة لمعرفة أي الشفرات التالية واضحة:

$W_1 = \{0, 01, 11\}$ $\quad$ $W_3 = \{0, 01, 001, 111\}$

$W_2 = \{0, 01, 10\}$ $\quad$ $W_4 = \{110, 11, 100, 00, 10\}$

ب) إذا كانت الشفرة واضحة فاذكر إذا كانت لحظية أم لا (مع ذكر السبب)، وإذا كانت غير واضحة فاضرب مثلاً لمجموعة من الرموز المتتابعة التي يمكن ترجمتها بأكثر من طريقة واحدة.

٣ ـ ١٩ لكل من الشفرتين التاليتين بيِّن إن كانت الشفرة (١) واضحة (uniquely decodable) (٢) لحظية (instantaneous)، وإذا لم تكن واضحة فاعط مثالاً لمجموعة رموز متتالية يمكن ترجمتها بأكثر من طريقة واحدة:

أولاً:

x_1	:	a b c
x_2	:	a b c d
x_3	:	e
x_4	:	d b a
x_5	:	b a c e
x_6	:	c e a c
x_7	:	c e a b
x_8	:	e a b d

ثانياً:

x_1	:	a
x_2	:	b a
x_3	:	b b b a
x_4	:	b b a
x_5	:	b a b b
x_6	:	b b a b

٣ـ ٢٠

أ) نفرض أن احتمالات إرسال عناصر مصدر للمعلومات X تحقق الشرط

$$p\ (x_i) = \frac{1}{3^{\ell_i}}\ ,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

حيث ℓ_i عدد صحيح . .

ونفرض أنه أمكن صياغة شفرة لحظية ثلاثية لعناصر هذا المصدر بحيث أن طول كلمة الشفرة المقابلة للعنصر x_i يساوي ℓ_i.

فما قيمة كفاءة هذه الشفرة؟

ب) المطلوب صياغة شفرة لحظية ثلاثية (بطريقة هوفمان) للمصدر التالي، وإيجاد قيمة كفاءة الشفرة.

$$\begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{27} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{27} & \frac{1}{27} \end{pmatrix}$$

٣ـ ٢١ نفرض أن النظام الثنائي القائم على الرقمين (0,1) والذي يستخدم في كثير من الآلات كالحاسبات الإلكترونية وأجهزة الاتصالات لتخزين المعلومات وإرسالها سيستخدم لصياغة الشفرات التالية لمصدر للمعلومات تحتوي قائمة رسائله على خمس رسائل {a, b, c, d, e} احتمالاتها على الترتيب هي {3. ,15. ,15. ,2. ,2.} وذلك لإرسالها عبر قناة عديمة الضوضاء.

١) شفرة شانون ـ فانو. ٢) شفرة هوفمان.

٣) الشفرة A: {01, 0000, 001, 0001, 1}.

كوّن كلا من الشفرتين الأولى والثانية.

ب. ما نوع الشفرة A؟ هل هي شمرة واضحة لا تؤدي إلى التباس في عملية الترجمة عند الاستقبال؟ وهل هي شفرة لحظية؟ ولماذا؟

حـ. ما هي أصغر قيمة نظرية (L_{min}) لمتوسط طول كلمة شفرة ثنائية واضحة لهذا المصدر؟

د. احسب متوسط طول كلمة الشفرة لكل من الشفرات السابقة. هل تؤدي أي من هذه الشفرات إلى الحصول على القيمة النظرية الصغرى L_{mim}؟

هـ. نفرض أن عملية إرسال الصفر (0) تستغرق ثانية واحدة، بينما يستغرق إرسال الواحد (1) ثلاث ثواني. احسب متوسط زمن إرسال الرسالة الواحدة للمصدر في كل من الشفرات الثلاث، وقارن بينها.

و. ارسم شجرة الشفرة الثنائية لأفضل الشفرات الثلاث أي التي تستغرق أقل وقت في إرسال الرسائل باعتبار أن طول فرع الشجرة يتناسب مع زمن إرسال الرقم.

٣ـ ٢٢ تنص النظرية الأساسية في «نظرية المعلومات» على أنه يمكن إرسال معلومات عبر قناة الاتصال بمعدل أقل من أو يساوي سعة القناة، وباحتمال حدوث خطأ صغير صغراً اختيارياً، سواء كانت هناك ضوضاء أو انعدم وجودها.

أ. ارسم شكلاً تخطيطياً يبين الأجهزة الرئيسية في نظام الاتصالات الذي يربط بين مصدر المعلومات وجهة الاستقبال.

ب. ما هي فوائد استخدام الشفرات في نظم الاتصالات؟

حـ. اذكر باختصار الطرق التي تعرفها لاكتشاف الأخطاء الأحادية وتصحيحها.

د. نفرض أن نظاماً للاتصالات يطبق طريقة هامنج لتصحيح الأخطاء الأحادية، وأن جهاز الشفرات يترجم رسائل المصدر إلى كلمات شفرة طول كل منها يساوي m. فكم عدد رموز التحقق k التي يلزم إضافتها إلى هذه الكلمات في كل من الحالات التالية: $m = 4, m = 7, m = 11$.

هـ. هل تصلح المعادلات التالية لاكتشاف وتصحيح الأخطاء الأحادية في حالة $m = 11$؟

إذا كانت الإجابة: نعم، فكيف؟، وإذا كانت الإجابة: لا، فلماذا؟

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7 + x_8 + x_{12} = \text{even}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 + x_9 + x_{10} + x_{13} = \text{even}$$

$$x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_7 + x_9 + x_{11} + x_{14} = \text{even}$$

$$x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_8 + x_{10} + x_{11} + x_{15} = \text{even}$$

٣ ـ ٢٣ يقوم نظام للاتصالات بين مدينتين ﺃ، ﺏ بإرسال حالة الطقس في المدينة ﺃ عند فترات زمنية معينة، ويستخدم النظام الشفرة الثنائية (on-off equipment). وللطقس في هذه المدينة خمس حالات ممكنة هي: { مشمس، غائم (كثير السحب)، ضبابي، ممطر، ثلجي }، واحتمالاتها على الترتيب هي:

$$\{ \tfrac{1}{٢} ، \tfrac{1}{٤} ، \tfrac{1}{٨} ، \tfrac{1}{١٦} ، \tfrac{1}{١٦} \}.$$

وقد صيغت رسائل الطقس في رموز المعلومات المتتابعة (information sequences) التالية على الترتيب:

{ 000 , 001 , 010 , 011 , 101 }

ولاكتشاف أخطاء الإرسال الأحادية وتصحيحها فإن النظام يضيف إلى أرقام المعلومات الثلاثة (ونفرض أننا سنرمز لها بالرموز $u_1\ u_2\ u_3$) في كل مجموعة رموز معلومات متتابعة ثلاثة أرقام تَحقُّق (check digits)

ترمز لها بالرموز $(u_4\,u_5\,u_6)$ حيث يقوم كل رقم منها بالتحقق من بعض أرقام المعلومات، كما يلي:

$$u_4 = u_1 \oplus u_2$$

$$u_5 = u_1 \oplus u_3$$

$$u_6 = u_2 \oplus u_3$$

حيث تعني العلامة $\oplus$ الجمع بالنسبة للرقم ٢

(addition in modulo - 2 arithmetic)

أي أن مصفوفة التحقق من النوعية (parity check matrix) هي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

وبأسلوب آخر فإن معادلات التحقق (parity check equations) يمكن أن تكتب بالصورة التالية:

$$u_1 + u_2 + u_4 = \text{even} \qquad E_1$$

$$u_1 + u_3 + u_5 = \text{even} \qquad E_2$$

$$u_2 + u_3 + u_6 = \text{even} \qquad E_3$$

i) وضِّح كيف يمكن لنظام التحقق هذا أن يكتشف الأخطاء الأحادية ويصححها.

ii) كوِّن جدولاً كاملاً يعطي رسائل الطقس وما يقابلها من كلمات الشفرة المرسلة (أرقام المعلومات + أرقام التحقق).

iii) نفرض أن مجموعة الرموز المتتالية المستقبلة كانت 010110.

فحدد أي رسالة أرسلت أصلاً، وبالتالي حدد حالة الطقس

أ) باختبار صحة معادلات التحقق وتصحيح الرقم الخاطىء إن كان هناك خطأ.

ب) بمراجعة جدول الشفرات الذي كوَّنته في الجزء ii).

٣ ـ ٢٤ نظرية في صياغة الشفرات لمصادر المعلومات
(A Source Coding Theorem):

إذا أعطينا مصدراً متقطعاً محدوداً X متوسط قيمة معلوماته H(X) (entropy) وأعطينا مجموعة أبجدية شفرية تتكون من عدد Dمن الرموز، فإن:

أ) أي مجموعة كلمات شفرة واضحة (u.d.) متوسط طول الكلمة فيها L تحقق المتباينة

$$L \geqslant \frac{H(X)}{\log D} \qquad \ldots\ldots (1)$$

ب) من الممكن أن نكوِّن شفرة لحظية متوسط طول الكلمة فيها L بحيث أن

$$L < \frac{H(X)}{\log D} + 1 \ \ldots\ldots (2)$$

المطلوب: I) باستخدام النظرية السابقة اثبت أنه بالنسبة لأي مصدر متقطع X يمكن أن نكوِّن شفرة ثنائية لحظية متوسط طول كلمة الشفرة فيها L، بحيث أن L تحقق المتباينتين:

$$H(X) \leqslant L < H(X) + 1 \ \ldots (3)$$

II) فيما يلي مجموعة من رسائل الجهاد واحتمالاتها وكلمات الشفرة المقابلة لها والتي تستعمل في أرض المعركة

الرسالة x_i	الاحتمال p_i	كلمة الشفرة في أرض المعركة c_i
أطلِق النار	0.34	بسم الله
تقدم للأمام	0.30	الحمد لله
لا تتحرك ولا تطلق النار	0.08	حي على الفلاح
اصعد التل	0.12	الله أكبر
اهبط الوادي	0.10	سبحان الله
ارجع للخلف	0.06	لا إله إلا الله

i) من المتطلبات العامة عند صياغة الشفرات أن تُعطى الرسالة الأكبر احتمالاً كلمة شفرة أقل طولاً، أي أن يتحقق الشرط التالي:

$$p_i \geqslant p_j \Rightarrow \ell_i \leqslant \ell_j \quad \forall_{i,j}$$

حيث ℓ_i هو طول كلمة الشفرة c_i.

بيِّن ما إذا كانت شفرة المعركة المعطاة تحقق هذا الشرط أم لا.

ii) المطلوب صياغة شفرة لحظية ثنائية لرسائل الجهاد السابقة علماً بأن مجموعة الشفرة تحتوي على الرمزين: النقطة (•) والشرطة (ـ)، وبحيث يكون متوسط طول كلمة الشفرة L أصغر ما يمكن.

احسب هذه القيمة الصغرى لمتوسط الطول L، واثبت أنها تحقق المتباينتين (3) المذكورتين سابقاً، حيث H(X) تمثل متوسط قيمة المعلومات (entropy) بالنسبة لمجموعة الرسائل $\{x_i\}$.

٣ ـ ٢٥ في الآلات الحاسبة (computing machines) تُعدُّ الشفرة التي يمكن أن تُرتَّب كلماتها بحيث أن كل كلمتين متعاقبتين تختلفان فيما بينهما في موضع واحد فقط (رقم ثنائي واحد only one binit) شفرة ذات أهمية عملية وتسمى شفرة جراي Gray Code ونرمز لها بالرمز G.

فمثلاً المصدر: $X = \{x_1 \ , \ x_2 \ , \ x_3 \ , \ x_4\}$

الذي احتمالات عناصره: $P = \{0.1, \ 0.2, \ 0.3, \ 0.4\}$

يمكن أن يعطَى شفرة جراي الثنائية: $G = \{00 \ , \ 01 \ , \ 11 \ , \ 10\}$

i) احسب كفاءة هذه الشفرة.

ii) طبق طريقة صياغة الشفرة اللحظية (شانون ـ فانو: S - F) بالنسبة للمصدر السابق.

iii) كوِّن شفرة متراصة (شفرة هوفمان: H) للمصدر X. (من مميزات طريقة صياغة الشفرة المثلى H أنه يمكن أن تُبرمَج بكفاءة عالية بالنسبة لحاسب رقمي digital computer)

iv) أي الشفرات الثلاث السابقة (G, S - F, H) تعد الأكبر كفاءة؟ قارن الكفاءات الثلاث.

v) احسب احتمال ظهور كل من الصفر 0 والواحد 1 في الشفرة G وكذلك في الشفرة S - F.

vi) حقِّق أن متوسط طول كلمة الشفرة L في الشفرة المثلى H التي كوَّنتها في الجزء iii) يُحَقِّق المتباينتين التاليتين [والمعلوم أنهما صحيحتان بالنسبة لأي شفرة ثنائية مثلى (H)]

$$H(X) \leqslant L \leqslant H(X) + 1 - 2p_{min}$$

حيث p_{min} هو أصغر احتمال في مجموعة احتمالات الرسائل.

٣ ـ ٢٦ تشتمل المعلومات والبيانات المخزونة في وسائل التخزين المساعد (auxiliary storage devices) أو المرسلة عبر خطوط الاتصال (communication lines) عادة على قدر كبير من الإطناب. فإذا أمكننا صياغة شفرة لهذه البيانات بحيث نقلل الإطناب فإننا نستطيع تقليل الحيز المطلوب للتخزين والوقت اللازم لإرسال البيانات. ومن أهم أسباب الإطناب في ملفات البيانات (data files) التوزيع الاحتمالي للرموز، فمثلاً الحرف e هو أكثر الحروف الإنجليزية استخداماً، والحرف ا هو أكثر الحروف العربية استخداماً، فمن الإطناب أن نمثل جميع الرموز بشفرة ثابتة الطول، ولكن يمكننا تقليل مثل هذا النوع من الإطناب بصياغة شفرة متغيرة الطول (كشفرة هوفمان) لهذه الرموز، بحيث نعطي الحروف الأكثر استخداماً عدداً أقل من الرموز الثنائية ـ أي كلمات شفرة أقصر ـ بينما تعطى الحروف الأقل احتمالاً كلمات شفرة أطول.

الجدول التالي يعطى شفرتين مختلفتين لحروف اللغة العربية :

الأولى : الشفرة القياسية (ASCII) ثابتة الطول [وهي اختصار American Standard Code for Information Interchange) الشفرة القياسية الأمريكية لتبادل المعلومات] حيث طول أي كلمة فيها : L = 8 bits .

الثانية : الشفرة المتراصة (هوفمان) متغيرة الطول، حيث تتراوح أطوال كلماتها من 3 إلى 9، ومتوسط طول كلمة الشفرة فيها : L = 4.4336 bits

المطلوب :

أ) قارن بين كفاءتى شفرة ASCII وشفرة هوفمان (أوجد النسبة بينهما).

ب) بَيِّن بمثال كيف أن الشفرة المتراصة تؤدي إلى ضغط (Compressing) أي ملف نصى عربي (Arabic text file) بنسبة كبيرة من حجمه الأصـلي. فمثلاً :

(١) اكتب كلمة **الحياء** في كل من الشفرتين القياسية والمتراصة.

(٢) اذكر عدد الرموز الثنائية المطلوبة في كـل من الشفرتـين لتخزين كلمات الحديث التالي (الذي رواه مسلم)، واحسب النسبة بين هذين العددين :

الحيـــاء خير كلـه

الشفرة المتراصة (هوفمان) والشفرة القياسية (ASCII) للحروف العربية

الرتبة RANK	الحرف LETTER	الاحتمال PROBABI-LITY	شفرة هوفمان HUFFMAN CODE	الطول LENGTH	الشفرة القياسية ASCII CODE
1	ا	0.13128	100	3	01101000
2	ل	0.10776	010	3	01100111
3	م	0.08728	000	3	01101100
4	ن	0.07249	1100	4	01101011
5	ي	0.06847	1010	4	01100100
6	و	0.06282	0111	4	00101100
7	هـ	0.04217	11111	5	01101001
8	ر	0.04116	11110	5	01110110
9	ب	0.03998	11100	5	01100110
10	ع	0.03794	11011	5	01101011
11	د	0.03646	11010	5	01011101
12	ت	0.02620	01100	5	01101010
13	ك	0.02549	00111	5	00111011
14	س	0.02456	00110	5	01110011
15	ف	0.02382	00101	5	01110100
16	ح	0.01823	101111	6	01110000
17	ق	0.01794	101110	6	01110010
18	أ	0.01113	001001	6	01001000
19	د	0.01095	001000	6	01100000
20	إ	0.01095	110111	7	01111010
21	ج	0.01051	1110110	7	01011011
22	ى	0.01019	1110101	7	01101110
23	ز	0.00827	1011010	7	00101110
24	ص	0.00816	1011001	7	01110111
25	ة	0.00771	1011000	7	01101101
26	ش	0.00768	0110111	7	01100001
27	خ	0.00767	0110110	7	01101111
28	ض	0.00468	11101000	8	01110001
29	ط	0.00465	10110111	8	00100111
30	ث	0.00376	10110110	8	01100101
31	ء	0.00364	01101011	8	01111000
32	غ	0.00347	01101010	8	01111001
33	ىء	0.00283	01101001	8	01111010
34	آ	0.00275	01101000	8	01001110
35	ؤ	0.00265	111010011	9	01100011
36	ظ	0.00212	111010010	9	00101111

٣ ـ ٢٧ إذا أردنا تخزين قدر كبير من المعلومات لمدة طويلة في ذاكرة الحاسب وكانت احتمالات رموز شفرة مصدر المعلومات متباينة فيما بينها تبايناً كبيراً، فإن استخدام الشفرة المتراصة (شفرة هوفمان) لتخزين المعلومات يؤدي إلى توفير قدر كبير من ذاكرة الأمد الطويل (long-term storage). وقد صُمِّمت برامج للمسح التلقائي لأي نص (automatic scanning of a text)، وتصميم شفرة، وضغط النص (compressing the text)، وتخزينه مع خوارزمية ترجمة الشفرة (decoding algorithm). ويحسب البرنامج ترددات (عدد مرات تكرار (frequencies) رموز المصدر، ويضيف رمزاً خاصاً يسمى «نهاية النص» (end of text) وتردده يساوي الوحدة، وهو يستخدم لإنهاء عملية الترجمة. ومن المعلوم أن مثل هذه البرامج تؤدي إلى تقليل حيز تخزين المعلومات إلى أقل من النصف.

من خواص الشفرة المتراصة (H)

(١) إذا كان عدد عناصر المصدر يساوي 2^L (حيث L عدد صحيح)، وكانت جميعها متساوية الاحتمالات، فإن شفرة H الثنائية تكون شفرة قالبية حيث طول أي كلمة شفرة يساوي L.

(٢) بينما إذا كانت احتمالات العناصر متباينة بدرجة كبيرة بحيث أن

$$p_i \geq \frac{2}{3} \sum_{k=i+1}^{n} p_k \quad \forall_i$$

(أي أن أي احتمال يساوي على الأقل ثلثي مجموع جميع الاحتمالات التي تليه)، فإنه يمكننا الحصول على ما يسمى **بشفرة الفاصلة** (Comma Code) وهي الشفرة التي يعمل فيها أحد الرقمين الثنائيين (الصفر أو الواحد) عمل الفاصلة في متتالية ثنائية، أي يدل على انتهاء كلمة شفرة (ويفصل بين كلمتين) مثل أي من الشفرتين التاليتين:

0	1
1 0	0 1
1 1 0	0 0 1
1 1 1 0	0 0 0

المطلوب:

أ) اثبت الخاصية (١) في الحالة $L = 3$، أي باستخدام مصدر معلومات يرسل ثمانية عناصر.

ب) حقق الخاصية (٢)باستخدام مصدر المعلومات:

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$$
$$P(X) = \{0.4, 0.25, 0.15, 0.10, 0.06, 0.04\}$$

٣ ـ ٢٨

(*) من الشفرات القالبية البسيطة والمستخدمة بكثرة الشفرة المسماة ٢ من ٥ (2-out-of-5 code)وفيها يمثل كل رقم عشري بخمسة أرقام ثنائية (n=5) منها واحدان والباقي أصفار كما هو مبين بالشكل التالي:

الرقم العشري	كلمات الشفرة ٢ من ٥
1	1 1 0 0 0
2	1 0 1 0 0
3	0 1 1 0 0
4	1 0 0 1 0
5	0 1 0 1 0
6	0 0 1 1 0
7	1 0 0 0 1
8	0 1 0 0 1
9	0 0 1 0 1
0	0 0 0 1 1

(*) من المعتاد عند تصميم شفرات اكتشاف الأخطاء تجزئة أي رسالة طويلة من أرقام ثنائية إلى قوالب (blocks) متساوية الأطوال، طول أي منها $(n-1)$ رقم، ثم إضافة رقم ثنائي واحد لكل قالب فيصبح طول القالب المرسل (الكلمة المرسلة): n، وربما نحتاج لإضافة بعض الأصفار إلى آخر قالب.

ويعرف **الإطناب** (redundancy) بأنه النسبة بين عدد الأرقام الثنائية المرسلة المستخدمة، وأقل عدد ممكن يلزم استخدامه:

$$R = \frac{n}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1}$$

والإطناب الزائد (excess redundancy) هو المقدار

$$R_e = \frac{1}{n-1}$$

ولتقليل الإطناب يفضل استخدام الرسائل الطويلة، بينما لتحسين درجة الوثوقية/ الاعتمادية (reliability) يفضل استخدام الرسائل القصيرة. ولذلك فعند اختيار الطول n للقوالب المرسلة نحتاج للمواءمة بين هذين العاملين المتقابلين.

المطلوب:

أ) هل تستخدم كلمات الشفرة ٢ من ٥ ـ باعتبارها الكلمات الكلية المرسلة ـ رموز التحقق من النوعية الفردية أم الزوجية (odd/even parity check) ولماذا؟

ب) كم تساوي كل من أقل مسافة وأكبر مسافة بين كلمتين من كلمات هذه الشفرة؟

ج) هل يمكن لهذه الشفرة اكتشاف أو تصحيح الأخطاء الأحادية أو الثنائية؟ وبأسلوب آخر هل يمكن أن نعتبر هذه الشفرة مثالا لشفرة اكتشاف/ تصحيح الأخطاء (error detecting/ correcting code)؟

د) اكتب العدد 125 في هذه الشفرة.

هـ) احسب كلا من الإطناب والإطناب الزائد في هذه الشفرة.

٣ ـ ٢٩ نفرض أن S هو مصدر المعلومات التالي:

$$\begin{pmatrix} S \\ p(S) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ .7 & .1 & .1 & .04 & .03 & .02 & .01 \end{pmatrix}$$

حيث متوسط قيمة معلومات المصدر تساوى

$$H(S) = -\sum_{I=1}^{7} p(x_i) \log p(x_i) = 1.54 \text{ bits/symbol}$$

ونفرض أنه قد صيغت كلمات الشفرة الثنائية التالية A لعناصر هذا المصدر:

S	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_1
A	0	1	01	10	11	00	000

أ) هل الشفرة A واضحة أم لا؟ ولماذا؟

ب) كم يساوي متوسط طول كلمة هذه الشفرة L_A؟

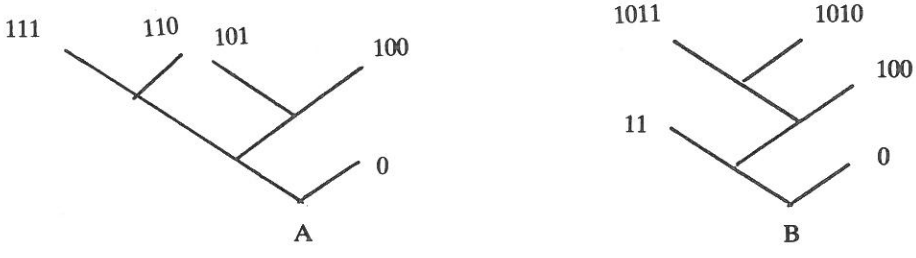
حـ) كم يساوي متوسط طول كلمة شفرة شانون ـ فانو L_{S-F} لهذا المصدر؟

ء) كم يساوي متوسط طول كلمة شفرة هوفمان L_H لهذا المصدر؟

هـ) كم تساوي كفاءة كل من شفرتي S-F, H.
قارن بين الكفاءتين

و) تنص إحدى نظريات الشفرات على أن متوسط طول كلمة الشفرة L- بالنسبة لأي شفرة واضحة (u.d.) ـ يجب أن يحقق المتباينة $L \geqslant \dfrac{H(S)}{\log D}$
حيث D هو عدد عناصر المجموعة الأبجدية للشفرة. فما مدى تحقق هذه المتباينة بالنسبة للشفرات الثلاث السابقة؟

٣ ـ ٣٠ نفرض أن S مصدر معلومات مكونة من خمسة عناصر متساوية الاحتمالات. صيغت لهذا المصدر الشفرتان A, B المبينتان بالشجرتين التاليتين:



أ) ارسم شجرة شفرة ثنائية قالبية C للمصدر S بحيث تكون أقصر ما يمكن.

ب) ارسم شجرة شفرة S-F وكذلك شجرة شفرة H للمصدر S.

حـ) قارن بين الشفرات الخمس A, B, C, H. S-F من حيث: متوسط طول

كلمة الشفرة، والكفاءة، وأيها تعتبر واضحة/ لحظية.

ء) هل الشفرات الخمس مختلفة فيما بينها اختلافاً شكلياً أو جوهرياً ولماذا؟

هـ) هل يمكن اكتشاف الأخطاء الأحادية في الشفرة C، ولماذا؟

إن كانت الإجابة: نعم، فهل يمكن أيضاً تصحيح هذه الأخطاء؟

وإن كانت الإجابة: لا، فكوِّن شفرة قالبية أخرى D للمصدر S يمكن بها اكتشاف الأخطاء الأحادية.

٣ ـ ٣١ تمهيد: من المعلوم أنه بالنسبة لأي مصدر متقطع X يمكن صياغة شفرة ثنائية لحظية متوسط طول كلمة الشفرة فيها L يحقق المتباينتين

$$H(X) \le L < H(X) + 1 \qquad (*)$$

وبالتالي فيمكن صياغة شفرة ثنائية لحظية للمصدر X^2 (حيث $X^2 = X \times X$) بحيث أن متوسط طول كلمة الشفرة فيها L_2 يحقق المتباينتين

$$H(X^2) \le L_2 < H(X^2) + 1$$

$$\Rightarrow \quad 2H(X) \le L_2 < 2H(X) + 1 \qquad \text{(بفرض الاستقلال)}$$

$$\Rightarrow \quad H(X) \le \frac{L_2}{2} < H(X) + \frac{1}{2}$$

وعموماً فيمكن صياغة شفرة ثنائية لحظية للمصدر X^m (حيث

$$X^m = X \times X \times \ldots \times X$$

بحيث أن متوسط طول كلمة الشفرة فيها L_m يحقق المتباينتين

$$H(X) \le \frac{L_m}{m} < H(X) + \frac{1}{m} \qquad (**)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{m \to \infty} \frac{L_m}{m} = H(X) \qquad (***)$$

ونظرا لأن L_m هو متوسط طول كلمة الشفرة المقابلة لسلسلة من m رمز من رموز المجموعة (المصدر) X، فإن $\frac{L_m}{m}$ يعنى متوسط عدد رموز الشفرة لكل رمز من رموز المجموعة X، وبالتالي فإنه يمكن صياغة العلاقة (***) في العبارة التالية وهي:

نظرية أساسية في صياغة الشفرات: من الممكن صياغة شفرة لحظية

ثنائية لمصدر متقطع عديم الذاكرة X بحيث أن متوسط طول كلمة الشفرة لكل رمز من رموز المصدر يقترب من H(X).

المطلوب:

أ) ما هي أقل قيمة ممكنة عملياً (L) لمتوسط طول كلمة شفرة ثنائية لحظية للمصدر $X = \{X_1, X_2, X_3\}$، حيث احتمالات عناصره هي على الترتيب $p_1=0.7,\ p_2 = 0.15,\ p_3 = 0.15$؟ أثبت أن L تحقق المتباينتين (*).

ب) ما هي أقل قيمة ممكنة عملياً (L_2) لمتوسط طول كلمة شفرة ثنائية لحظية للمصدر X^2؟ وبالتالي كم يساوي متوسط عدد الأرقام الثنائية (bits) لكل رمز من رموز المصدر X؟ هل هو أكبر أم أصغر من L؟

حـ) قارن بين كفاءة شفرة المصدر X (في (أ)) وكفاءة شفرة المصدر X^2 (في (ب)).

ء) قارن بين شفرة المصدر X وشفرة المصدر X^2 من حيث كل من بساطة الشفرة وسرعة فكها.

هـ) ما هي رموز الشفرة المقابلة لسلسلة الرموز المتتالية $X_1X_2X_1X_1$ في كل من الشفرتين؟

٣ ـ ٣٢ يتكون مصدر المعلومات S من أحد عشر رمزاً مبينة مع احتمالاتها في الجدول التالي:

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	S_{11}
.22	.12	.10	.10	.08	.15	.06	.05	.05	.04	.03

المطلوب:

صياغة شفرتين لحظيتين متراصتين (compact) إحداهما ثلاثية (trinary) والأخرى رباعية (quaternary) لرموز المصدر، وحساب كفاءة كل من الشفرتين والمقارنة بينهما.

٣ ـ ٣٣ [تغير كفاءة الشفرة η مع تغير عدد رموزها D]

الجدول التالي يعطى شفرات متراصة (شفرات هوفمان) لمصدر معلومات مكـوَّن من ١٣ رمـزاً ـ احتمالاتها مبيَّنة بالجدول - وذلك لمجموعـات أبجديـة مختلفة لكلمات الشفرة، حيث يتغير عدد عناصر المجموعة الأبجديـة للشفرة (D) من ٢ إلى ١٣ (أي أن الجدول يعطى شفرات ثنائية، وثلاثية، ورباعية، . . .، وثلاث عشرية للمصدر).

Compact codes for D =

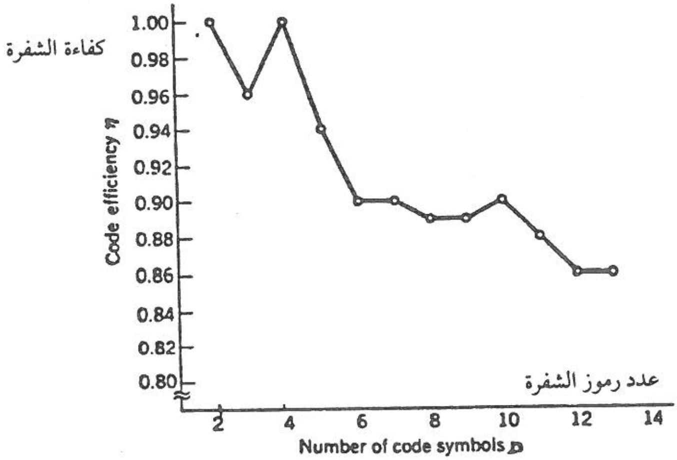
$P(s_i)$	s_i	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
$\frac{1}{4}$	s_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	00
$\frac{1}{4}$	s_2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	01
$\frac{1}{16}$	s_3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	20	200	1000
$\frac{1}{16}$	s_4	3	3	3	3	3	3	3	3	30	21	201	1001
$\frac{1}{16}$	s_5	4	4	4	4	4	4	4	4	31	22	202	1010
$\frac{1}{16}$	s_6	5	5	5	5	5	5	5	50	32	23	210	1011
$\frac{1}{16}$	s_7	6	6	6	6	6	6	60	51	33	30	211	1100
$\frac{1}{16}$	s_8	7	7	7	7	7	70	61	52	34	31	212	1101
$\frac{1}{16}$	s_9	8	8	8	8	80	71	62	53	40	32	220	11100
$\frac{1}{64}$	s_{10}	9	9	9	90	81	72	63	54	41	330	221	111100
$\frac{1}{64}$	s_{11}	A	A	A0	91	92	73	64	550	42	331	2220	111101
$\frac{1}{64}$	s_{12}	B	B0	A1	92	83	74	65	551	43	332	2221	111110
$\frac{1}{64}$	s_{13}	C	B1	A2	93	84	75	66	552	44	333	2222	111111
Average length L....		1	$\frac{33}{32}$	$\frac{67}{64}$	$\frac{17}{16}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{19}{16}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{87}{64}$	$\frac{23}{16}$	$\frac{25}{16}$	$\frac{131}{64}$	$\frac{25}{8}$

أ) أوجد ـ باتباع طريقة هوفمان - شفرة متراصة رباعية وأخرى سداسية لهذا المصدر. وفي كل من الحالتين:

(١) قارن الشفرة التي حصلت عليها مع الشفرة المذكورة بالجدول: هل الشفرتان منطبقتان أم مختلفتان؟ وإن كانتا مختلفتين، فهـل الاختلاف جوهري أم شكلي؟

(٢) أحسب متوسط طول كلمة الشفرة L، وقارن مع القيمة المذكورة بالجدول.

(٣) أحسب كفاءة الشفرة η، وقارن مع القيمة التي يعطيها المنحنى المبين بالشكل والذي يعطى العلاقة بين كفاءة الشفرة η وعدد رموز الشفرة D.



ب) كيف يتغير كل من متوسط طول كلمة الشفرة L وكفاءة الشفرة η مع تغيُّر عدد رموز الشفرة D، كما يتضح من الجدول السابق ومن المنحنى بالشكل؟

حـ) ما هو الشرط الذي حققته احتمالات رموز المصدر بحيث بلغت كفاءة الشفرة الثنائية ١٠٠٪ (انظر المنحنى)؟.

ء) ارسم شجرة الشفرة الثنائية ـ المعطاة بالجدول ـ لرموز مصدر المعلومات.

٣ ـ ٣٤ [تَغيُّر كفاءة الشفرة η مع تغيُّر رتبة امتداد المصدر (k)]

نفرض أن S مصدر معلومات ثنائي يرسل متتالية من الرقمين الثنائيين المستقلين 0,1 بالاحتمالين $p(0) = 0.9, p(1) = 0.1$.

أ) كوِّن شفرة ثنائية لحظية متراصة (شفرة H) لهذا المصدر، ثم لامتداده الثنائي، ثم لامتداده الثالث. وفي كل حالة أوجد متوسط طول كلمة

الشفرة L، وكفاءة الشفرة η.

ب) إذا عُلِمَ أن متوسط طول كلمة الشفرة المتراصة (الثنائية اللحظية) للامتداد الرابع لهذا المصدر: $L = 1.9702$ فاحسب كفاءة الشفرة في هذه الحالة، ثم بَيِّنْ كيف تتغيَّر كفاءة الشفرة مع تغيُّر رتبة امتداد المصدر k (وذلك للقيم $k = 1,2,3,4$).

٣ ـ ٣٥ من الطرق المفيدة عملياً في صياغة الشفرات طريقة صياغة شفرة **طول الشَّوط (طول المَسير)** (run length coding technique)، ويوضحها المثال التالي: نفرض أن المصدر X يولد متتالية من الأرقام الثنائية المستقلة بالاحتمالين

$$p(0) = 0.9 \ , \ p(1) = 0.1$$

سنقوم بصياغة شفرة لهذه المتتالية على مرحلتين:

(i) المرحلة الأولى:

نظراً للاحتمال الكبير لإرسال الصفر ($p(0) \approx 1$)، أي لكثرة الأصفار المرسلة، فيمكن أن نوجه نظرنا إلى عملية إرسال أطوال أشواط الأصفار المتتابعة (أي أعداد الأصفار) (transmitting the lengths of the successive runs of 0's) بين الآحاد المتعاقبة. أي نعتبر أن لدينا مصدراً جديداً S عناصره

$$S_0 \ , S_1 \ , S_2 \ ,\ldots, \ S_8$$

حيث نرسل S_i عندما يتتابع عدد i من الأصفار بين واحدين بحد أقصى ٨ أصفار، فمثلاً المتتالية الثنائية التالية من المصدر X تصاغ لها الشفرة المبينة من المصدر S:

$$\begin{array}{llllllllllllllllllll} X & \rightarrow & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ S & \rightarrow & S_0 & & & S_2 & & & & & & & & & S_8 & S_2 & S_0 & & & & S_4 \end{array}$$

أي أن المرحلة الأولى تحول متتاليات المصدر X إلى رموز S الوسطية تبعاً للقاعدة التالية:

الرموز الوسطية Intermediate Symbols (أعداد الأصفار)	متتاليات المصدر X Source Sequences
S_0	1
S_1	0 1
S_2	0 0 1
S_3	0 0 0 1
$\vdots$	$\vdots$
S_7	0 0 0 0 0 0 0 1
S_8	0 0 0 0 0 0 0 0

(ii) المرحلة الثانية :

نُكوِّن كلمات شفرة ثنائية لحظية مقابلة للرموز الوسطية (رموز أعداد الأصفار أي رموز المصدر S) كما يلي :

(١) كلمة شفرة S_8 تتكون من رقم ثنائي واحد .

(٢) كلمات الشفرة المقابلة للرموز الوسطية الأخرى تتكون كل منها من ٤ أرقام ثنائية .

المطلوب :

أ) كوِّن كلمات شفرة المرحلة الثانية .

ب) اثبت أن الشفرة الكلية (overall code) واضحة (uniquely decodable) .
[ارشاد : إذا كانت شفرة كل من المرحلتين واضحة فإن الشفرة الكلية تكون واضحة] .

ج) احسب احتمالات رموز المصدر S .

د) احسب قيمة L_1 : متوسط عدد أرقام المصدر X المقابلة للرمز الواحد من الرموز الوسطية .

هـ) احسب قيمة L_2 : متوسط عدد الأرقام الثنائية في الشفرة النهائية (متوسط طول كلمة الشفرة النهائية) المقابلة للرمز الواحد من الرموز الوسطية .

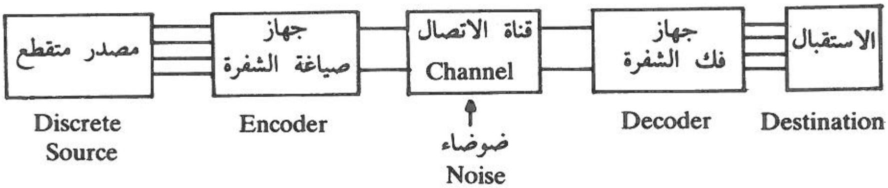
و) أحسب النسبة $R = L_2 / L_1$.

[ملاحظة: يمكن باستخدام قانون الأعداد الكبيرة (law of large numbers) إثبات أنه بالنسبة لمتتالية طويلة جداً من أرقام المصدر X تكون النسبة بين عدد الأرقام الثنائية في الشفرة النهائية وعدد أرقام المصدر X قريبة جداً باحتمال كبير من النسبة R].

تمرينات عامة
على نظرية المعلومات

تمرينات عامة على نظرية المعلومات

(١) الشكل التالي يبين أحد نظم الاتصالات:



i) يقوم مصدر المعلومات بإرسال حروف مستقلة إحصائياً ومختارة من المجموعة الأبجدية

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$$

وذلك بالاحتمالات $P(A) = \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4\}$ على الترتيب.

احسب متوسط قيمة المعلومات التي يحملها الحرف الواحد.

ii) تدخل المخرجات من المصدر جهازاً لصياغة شفرة ثنائية حيث يقوم بترجمة رموز المصدر محولاً إياها إلى كلمات شفرة متساوية الطول وطول كل منها يساوي خمسة تبعاً للجدول التالي:

رمز المصدر	a_i	:	a_4	a_3	a_2	a_1
كلمة الشفرة	c_i	:	11010	10111	01101	00000

احسب احتمال كل من الصفر 0 والواحد 1 عند مخرج جهاز صياغة الشفرة وأوجد القيمة المتوسطة لمعلومات المصدر الثنائي (الذي يرسل الأصفار والآحاد).

iii تُرسَل الرسائل المشفَّرة عبر قناة ضوضائية تسبب بعض الأخطاء بحيث أن الصفر 0 يُحَرَّف إلى واحد 1 باحتمال 0.1، والواحد 1 إلى صفر 0 باحتمال 0.2.

أوجد أ) احتمال ظهور كل من الصفر 0 والواحد 1 عند طرف القناة جهة الاستقبال.

ب) القيمة المتوسطة للمعلومات للرمز الواحد عند جهة الاستقبال.

حـ) القيمة المتوسطة (entropy) للضوضاء أو الخطأ في القناة.

د) سعة القناة.

iv) تدخل مخرجات القناة الثنائية المتتابعة جهاز فك الشفرة والذي يعمل بمبدأ المسافة الصغرى (minimum distance decoding) حيث تُختبر المسافة بين مجموعة الرموز المستقبلة (خمسة أرقام) وكل كلمة شفرة c_i ، ثم تفك شفرة المجموعة المستقبلة على أن أصلها ـ قبل حدوث أخطاء الإرسال والاستقبال عبر القناة ـ كلمة الشفرة c_i المقابلة لأصغر مسافة، وبالتالي يتم تحديد رمز المصدر المقابل a_i، والذي يرسل إلى جهة الاستقبال.

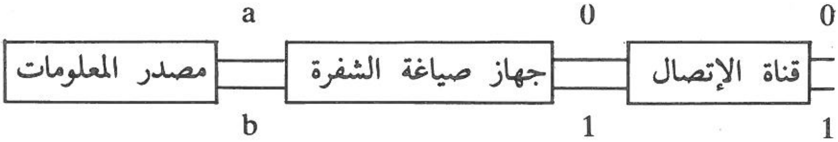
أ) هل يمكن لهذا الجهاز لفك الشفرة أن يكتشف أو يصحح الأخطاء الأحادية والأخطاء الثنائية في مجموعات الرموز المستقبلية؟

ب) ما هي مجموعة الحروف المتتابعة التي نتوقع أن تصل إلى جهة الاستقبال إذا استُقبلت مجموعة الرموز المتتابعة التالية عند مدخل جهاز فك الشفرة:

0 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 0...

٧) إذا فرضنا أن جهاز صياغة الشفرة يصدر كلمات شفرة طول كل منها يساوي ٢ بدلاً من ٥، فهل يحدث تحسُّن أم لا في كل مما يأتي، ولماذا؟
أ) كفاءة الشفرة ب) تصحيح الأخطاء.

(٢) يمكن صياغة النظرية العامة للشفرات بالعبارة التالية: إذا أُعطينا قناة للاتصالات ومصدراً للمعلومات، وكان معدل إرسال المعلومات من المصدر أقل من سعة القناة، فإنه من الممكن صياغة شفرة مناسبة لمعلومات المصدر لإرسالها عبر القناة، أما إذا كان معدل إرسال المعلومات من المصدر أكبر من سعة القناة فلا يمكن صياغة شفرة لمعلومات المصدر لإرسالها عبر القناة بدون أخطاء.



نفرض أن قناة الاتصال قناة ثنائية يُرسَل خلالها الرقمان 0, 1 وأن إرسال أي منهما يستغرق ثانية واحدة، أي أن سعة القناة تساوي ١ (وحدة معلومات/ ثانية أو رقم واحد/ثانية). ونفرض أن مصدر المعلومات S يرسل الحرفين a, b بالاحتمالين 0.8, 0.2 على الترتيب، وأن الحروف المتتالية المرسلة مستقلة عن بعضها البعض، وترسل بمعدل ثمانين حرف/دقيقة.

أ) كم تبلغ القيمة المتوسطة لمعلومات المصدر H(S) مقاسة بعدد وحدات المعلومات/حرف؟ وكم قيمة معدل إرسال المعلومات من المصدر R_s مقاساً بعدد وحدات المعلومات/ثانية؟ هل هذا المعدل أكبر أم أقل من سعة القناة؟

ب) المطلوب تطبيق الطريقة اللحظية الثنائية (S-F) باستخدام الرقمين
0، 1 لصياغة شفرة لعناصر المصدر باتباع كل من الطرق الثلاث
التالية :

١ . **الطريقة الأولى** : الطريقة المعتادة المباشرة بإعطاء كلمة شفرة
لكل حرف من حروف المصدر.
كم قيمة متوسط طول كلمة الشفرة L (عدد الأرقام/
حرف)؟
وبالتالي كم قيمة معدل إرسال المعلومات إلى القناة R_c (عدد
الأرقام/ثانية)؟
هل يمكن للقناة أن تستوعب هذا المعدل؟

٢ . **الطريقة الثانية** : إعطاء كلمة شفرة لكل حرفين متتاليين معاً،
أي بصياغة شفرة لعناصر المجموعة
$S^2 \equiv S \times S \equiv \{ aa, ab, ba, bb\}$
كم قيمة متوسط طول كلمة الشفرة (عدد الأرقام لكل حرفين
متتاليين من حروف المصدر)؟
وبالتالي كم قيمة متوسط طول كلمة الشفرة للحرف الواحد
من حروف المصدر؟
وكم قيمة معدل إرسال المعلومات من جهاز الشفرة إلى القناة
R_c (عدد الأرقام/ ثانية)؟
وما علاقة هذا المعدل بسعة القناة؟

٣ . **الطريقة الثالثة** : صياغة شفرة لعناصر المجموعة
$S^3 \equiv S \times S \times S \equiv \{aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb\}$
كم قيمة معدل إرسال المعلومات إلى القناة؟ وما علاقته بسعة
القناة؟

جـ) إذا أرسل المصدر المجموعة التالية من الحروف المتتابعة، فما هي الرموز التي يرسلها جهاز الشفرة عند اتباع كل من الطرق الثلاث المذكورة؟

a b a a a a b a a a a a

د) ما هي كفاءة كل من الطرق الثلاث لصياغة الشفرة؟

(٣) تُعرَّف إحدى القنوات الثنائية المتماثلة بالاحتمالات المشروطة التالية:

$$p(1/0) = p(0/1) = 0.12$$

وتتكون المعلومات الداخلة للقناة من أربع كلمات متساوية الاحتمالات، وهذه الكلمات (مع كلمات الشفرة الثنائية المقابلة لها) هي:

m_1:111 , m_2:100 , m_3:010 , m_4:001

أ) احسب قيمة كل من $p(0)$, $p(1)$ عند مدخل القناة.

ب) احسب سعة هذه القناة.

جـ) ماذا يقصد بكفاءة إرسال المعلومات عبر القناة؟ وما الفرق بينها وبين كفاءة الشفرة؟ احسب قيمة كل من الكفاءتين.

(٤) نفرض أن S هو مصدر المعلومات الثنائي $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}$ ونفرض أن S′ هو الامتداد الثاني لهذا المصدر، أي أن S′ يتكون من العناصر:

x_1x_1 , x_1x_2 , x_2x_1 , x_2x_2

حيث كل عنصر عبارة عن رمزين متتاليين.

أ) اثبت أن القيمة المتوسطة لمعلومات المصدر S′ تساوي ضعف القيمة المتوسطة لمعلومات المصدر S، أي أن:

$$H(S') = 2H(S)$$

ب) نفرض أن $p_2 = \frac{1}{3}$ و $p_1 = \frac{2}{3}$. أوجد شفرة هوفمان الثنائية لكل من المصدرين S, S'، واحسب - في كل حالة - قيمة متوسط طول كلمة الشفرة للرمز الواحد.

جـ) احسب كفاءة الشفرة لكل من المصدرين، وقارن بين قيمتى الكفاءة.

د) أعد حل الجزء ب) مع شفرة هوفمان الثلاثية بدلاً من الثنائية.

(٥) رمضان.. شهر الصبر والجهاد.. وقعت فيه كثير من المعارك الحاسمة في تاريخ الإسلام، منها:

-١- وقعة بدر: يوم **الجمعة صبيحة سبعَ عشرةَ من رمضان**.

-٢- وفي **رمضان** من السنة الخامسة كان استعداد المسلمين لغزوة الخندق، التي وقعت في شوال.

-٣- وفي **رمضان** من السنة الخامسة وجَّه الرسول ﷺ السرايا لهدم الأصنام.

-٤- وفي **رمضان** في اليوم **الحادي والعشرين** من السنة الثامنة تم الفتح الأعظم: فتح مكة.

-٥- وفي **رمضان** من السنة التاسعة كانت غزوة تبوك.

-٦- وفي **رمضان** من السنة العاشرة كانت سرية اليمن.

-٧- وفي **رمضان** عام ثلاث وخمسين من الهجرة تم فتح جزيرة رودس.

-٨- وفي **رمضان** عام واحد وتسعين نزل المسلمون إلى الشاطىء الجنوبي للأندلس.

-٩- وفي **رمضان** عام اثنين وتسعين انتصر طارق بن زياد على رودريك في معركة فاصلة (وادي برباط)

-١٠ وفي **رمضان** عام أربعة وثمانين وخمسمائة انتصر صلاح الدين على الصليبيين واستولى على أعظم معاقلهم (قلعة صفد) في منتصف رمضان.

-١١-وفي **رمضان** عام ثمانية وخمسين وستمائة هزم المسلمون جنود التتار في عين جالوت هزيمة ساحقة.

المطلوب:

أولاً: كم عدد وحدات المعلومات التي تعطينا إياها المعلومات ـ التي تحتها خط ـ في:

(i) العبارة رقم -١- عن غزوة بدر الكبرى

(ii) العبارة رقم -٤- عن فتح مكة.

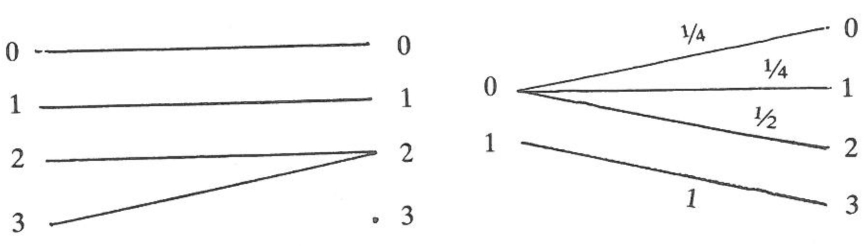
(iii) أي عبارة من العبارات الأخرى.

ثانياً: كم يساوي القدر الكلي لوحدات المعلومات التي تعطينا إياها كل المعلومات ـ التي تحتها خط ـ في مجموعة العبارات السابقة (من -١- إلى -١١-)؟

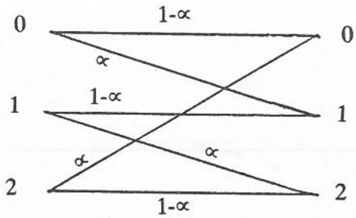
(٦) أوجد سعة قناة المعلومات المعرفة بالمصفوفة.

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

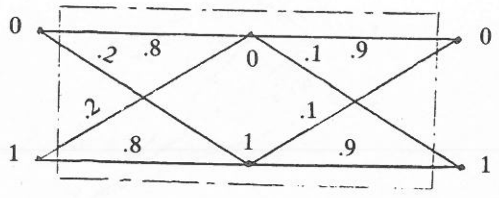
(٧) كم تبلغ سعة كل من القنوات التالية؟ ولماذا؟



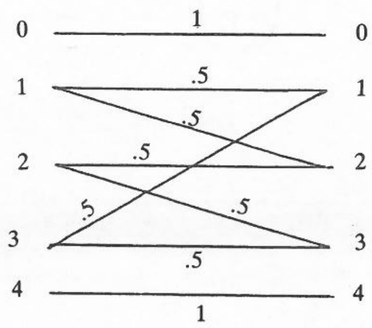
(ب) (أ)



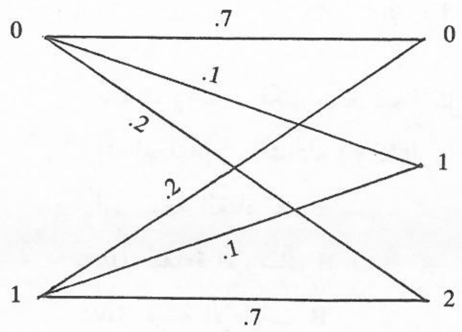
(جـ)



(د)



(هـ)

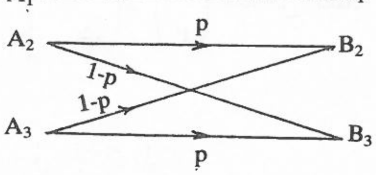


(و)

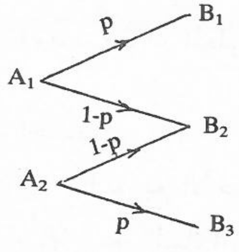
(٨)

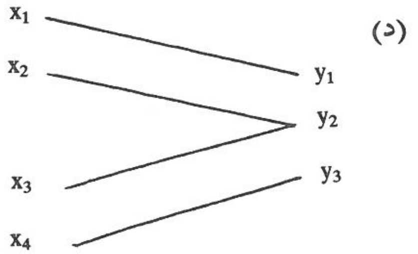
-١ - كم تبلغ سعة كل من القنوات التالية:

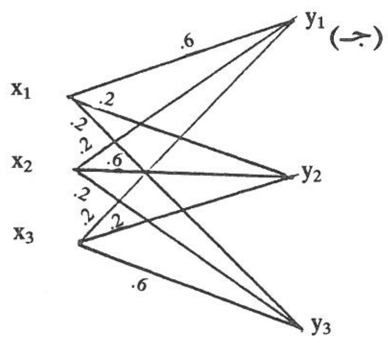
(أ)



(ب)







(٢) إذا وصل المصدر:

$$\begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

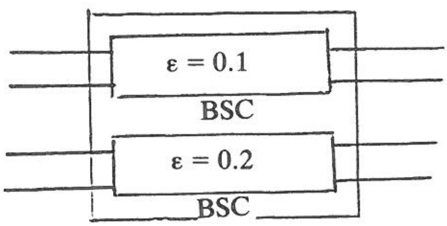
بالقناة (حـ)، فكم تبلغ قيمة كل من:

i) المعلومات المتبادلة $I(X,Y)$

ii) سعة القناة C

iii) كفاءة الإرسال η

iv) قيمة الإطناب R



(٩) وصلت قناة ثنائية متماثلة احتمال الخطأ فيها 0.1 على التوازي مع قناة ثنائية متماثلة احتمال الخطأ فيها 0.2 كما هو مبين بالشكل.

ووصل مصدر المعلومات $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix}$ بمداخل القناة المركبة:

احسب:

أ) التوزيع الاحتمالي الأمثل عند مداخل القناة المركبة

ب) سعة القناة المركبة

حـ) كفاءة الإرسال خلال القناة المركبة.

(١٠) أي العبارات التالية صحيحة وأيها خاطئة، مع بيان السبب في كل حالة، ومع تصحيح العبارة الخاطئة إن أمكن.

-١- كلما زاد احتمال العنصر زادت قيمة المعلومات التي نحصل عليها بمعرفة حدوثه.
-٢- القيمة المتوسطة لمعلومات مصدر تكون أكبر ما يمكن عندما تتساوى احتمالات عناصره.
-٣- المعلومات المتوقعة من تجربتين تساوي مجموع المعلومات المتوقعة من كل من التجربتين على انفراد.
-٤- الإطناب في إرسال المعلومات وسيلة من وسائل محاربة الضوضاء.
-٥- سعة قناة الاتصال لا تعتمد على المصدر الذي يرسل المعلومات خلال القناة.
-٦- كفاءة صياغة شفرة لعناصر مصدر معلومات، وكذلك كفاءة إرسال هذه المعلومات خلال قناة الاتصال لا يمكن أن تزيد عن ١٠٠٪.
-٧- قناة المعلومات قد تكون ضوضائية ولكنها عديمة المفقودات.
-٨- سعة القناة المركبة من قناتين على التوالي تكون دائماً أكبر من اي منهما، بينما سعة القناة المركبة من قناتين على التوازي تكون دائماً أصغر من أي منهما.
-٩- طريقة هوفمان لصياغة شفرة لحظية لعناصر مصدر ما تعطى دائماً أعلى كفاءة ممكنة، ولا يمكن أن تعطى أي طريقة أخرى نفس كفاءتها بالنسبة لأي مصدر.
-١٠-إذا كانت أقل مسافة بين كلمتى شفرة في مجموعة كلمات شفرة تساوي ٤ فإنه يمكن اكتشاف وتصحيح كل من الأخطاء الأحادية والثنائية فقط.
-١١-إذا كان عدد رموز المعلومات في شفرة قالبية يساوي ٦ فإنه يلزم على الأقل ثلاثة رموز تحقق في طريقة هامنج لتصحيح الأخطاء الأحادية.

-١٢-كلما قَلَّ الطول الثابت لكلمات الشفرة القالبية زادت كفاءة الشفرة وزادت إمكانية تصحيح الأخطاء.

-١٣-الشفرتان المختلفتان اختلافاً شكلياً يكون لهما نفس الكفاءة، بينما الشفرتان المختلفتان اختلافاً جوهرياً تكونان مختلفتين في الكفاءة.

(١١) يقوم مصدر للمعلومات بإرسال تسعة وعشرين عنصراً هي حروف اللغة العربية الثمانية والعشرون والفراغ.

والجدول التالي يعطى احتمالات هذه العناصر مرتبة ترتيباً تنازليا.

العنصر x_i	الاحتمال p_i	العنصر x_i	الاحتمال p_i	العنصر x_i	الاحتمال p_i
الفراغ	.198	ف	.019	ث	.003
ا	.112	ك	.016	ط	.003
ي	.105	س	.013	ظ	.002
ن	.103	د	.013		
ل	.076	ذ	.011		
م	.061	ح	.009		
و	.058	ج	.007		
هـ	.044	خ	.006		
ر	.027	ش	.005		
ب	.026	ص	.005		
ت	.023	غ	.005		
ق	.022	ز	.004		
ع	.021	ض	.004		

القيمة المتوسطة لمعلومات هذا المصدر هي:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{29} p_i \log_2 p_i$$

$$= 3.9423 \text{ bits/symbol}$$

أولاً: نفرض أن القائد (مصدر المعلومات) في إحدى المعارك قد أرسل إلى جنوده المجاهدين الرسالة التالية:

«اقتلوهم حيث ثقفتموهم وأخرجوهم من حيث أخرجوكم» (*).

أ) احسب قيمة المعلومات الذاتية لكل حرف من حروف كلمة (اقتلوهم)، وبالتالي أوجد قيمة المعلومات الكلية لكلمة (اقتلوهم). ثم أوجد هذه القيمة الأخيرة باستخدام القيمة المتوسطة H(X) لمعلومات المصدر، وقارن بين القيمتين.

ب) احسب قيمة المعلومات الكلية التي نحصل عليها باستقبال الرسالة (*) باستخدام القيمة المتوسطة لمعلومات المصدر، وبفرض أنه يوجد فراغ واحد بين كل كلمتين متتاليتين.

ثانياً: نفرض أن رسائل المصدر تُترجَم إلى شفرة ثنائية لحظية باستخدام طريقة شانون-فانو (S-F) فما هي كلمة الشفرة المقابلة لكلمة (اقتلوهم).

ملاحظة: ليس من الضروري الحصول على كل كلمات الشفرة المقابلة لعناصر المصدر، بل يكفي الحصول على الكلمات المقابلة للعناصر الموجودة في العمود الأول من الجدول السابق، وهي العناصر الأكبر احتمالاً: الفراغ، أ، ب، ن، . . .، ق، ع.

ثالثاً: إذا فرضنا أن عناصر المصدر تُصاغ في شفرة قالبية (ذات طول ثابت) بدلاً من شفرة S-F، فما هو أقل طول ممكن لهذه الشفرة القالبية؟ وما هي كلمة الشفرة المقابلة لكلمة (اقتلوهم) في هذه الحالة؟

(١٢) i) كم تساوي سعة كل من القناتين التاليتين؟

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$$

(أ) (ب)

ii) نفرض أن القناتين (أ)، (ب) قد وصلتا على التوازي. احسب سعة القناة المكافئة، والتوزيع الاحتمالي الأمثل لعناصر الإرسال عند مدخل القناة المكافئة.

(١٣) إذا كان لدينا عدة شفرات لحظية فإن أفضلها أعلاها كفاءة (أقلها متوسط طول كلمة شفرة)، وإذا تساوت بعض الشفرات في الكفاءة فإن أفضلها أقلها تباعداً عن متوسط طول كلمة الشفرة L، أي الشفرة التي يكون فيها تباعد أطوال كلماتها عن L أقل ما يمكن، أي الشفرة التي تعطى أقل قيمة (للتباعد) للتباين (variance) الذي يحسب بالعلاقة:

$$var = \sum_{i=1}^{n} p_i \ (l_i - L)^2$$

حيث:

p_i : احتمال الرسالة رقم i

l_i : طول كلمة الشفرة رقم i

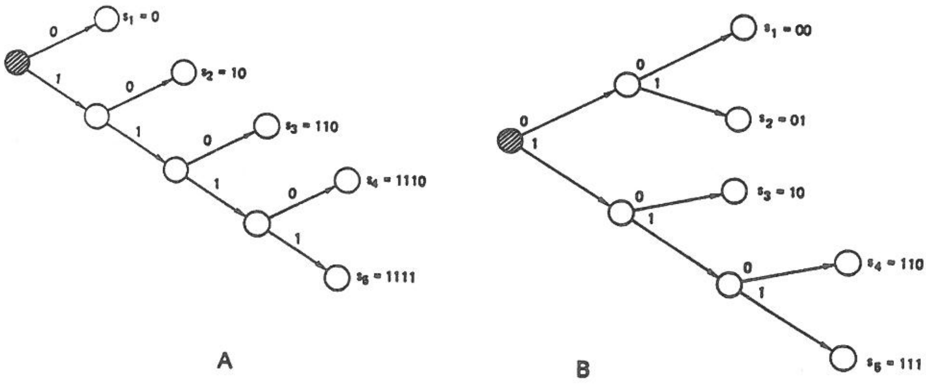
n : عدد رسائل المصدر

نفرض أن S مصدر معلومات يرسل خمس رسائل بالاحتمالات التالية:

$$S = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$$

$$P(S) = \{.4, .2, .2, .1, .1\}$$

صيغت لهذا المصدر الشفرتان A, B المبينتان بالشجرتين التاليتين:



أ) أي الشفرتين تعد شفرة لحظية؟ ولماذا؟

ب) أي الشفرتين أعلى كفاءة؟ ولماذا؟ وكم تساوي كفاءتها؟

ج) هل الشفرتان مختلفتان اختلافاً شكلياً أم جوهرياً؟ ولماذا؟

د) هل يمكنك باتباع طريقة S-F صياغة شفرة لحظية C مختلفة اختلافاً جوهرياً عن كل من الشفرتين A, B؟ ارسم شجرة الشفرة C إن أمكن صياغتها.

هـ) هل يمكنك صياغة شفرة لحظية D أعلى كفاءة من الشفرات السابقة A, B, C؟ وكيف؟ ارسم شجرة الشفرة D إن أمكن صياغتها.

و) هل يمكنك صياغة شفرة قالبية E للمصدر S بحيث تكون أقصر ما يمكن، وبحيث يتساوى فيها احتمال ظهور كل من الواحد والصفر؟ ارسم شجرة هذه الشفرة إن أمكن صياغتها.

كم تساوي القيمة المتوسطة لمعلومات جهاز صياغة هذه الشفرة (entropy of binary encoder) أي انتروبيا هذا المصدر الثنائي؟ وكم رمزاً ثنائياً يحتاج لإرسالها لنقل كمية معلومات تساوي خمسة آلاف وحدة معلومات ثنائية؟

ز) أي الشفرات الخمس السابقة A, B, C, D, E أفضل؟ ولماذا؟

(١٤) الشفرة الانعكاسية:

يجب أن تحول المعلومات والبيانات الموجودة في صورة متصلة (تناظرية analog) إلى صورة متقطعة (رقمية digital) قبل إدخالها إلى النظم الرقمية كالحاسبات. ومن الشفرات المستخدمة لتمثيل البيانات الرقمية المحولة من الصورة التناظرية: الشفرة الانعكاسية (Reflected Code / Gray Code) R– كالمبينة فيما يلي - والتي تتميز بخاصية معينة وهي أن كل كلمة شفرة فيها تختلف عن الكلمة التي تليها مباشرة في موضع واحد فقط.

$R = \{ 000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100\}$

أ) نفرض أنه قد صيغت كلمات الشفرة R لرسائل مصدر معلومات X يرسل ثمانية عناصر احتمالاتها هي:

$P = \{0.4, 0.2, 0.1, 0.1, 0.05, 0.05, 0.05, 0.05\}$

حيث $H(X) = 2.5219$. احسب كفاءة الشفرة R .

ب) طبق طريقة صياغة الشفرة اللحظية (S-F) بالنسبة للمصدر X، واحسب كفاءة هذه الشفرة.

ج) ما قيمة أكبر كفاءة شفرة لحظية يمكن الوصول إليها عملياً لهذا المصدر؟

د) طبق طريقة صياغة الشفرة المتراصة (H) للمصدر X، واحسب كفاءة هذه الشفرة.

هـ) أحسب احتمال ظهور كل من الصفر 0 والواحد 1 في الشفرة R، وكذلك في الشفرة S-F، وعقب على النتائج.

و) نفرض أن عملية إرسال الصفر 0 تستغرق ثانية واحدة بينما يستغرق إرسال الواحد 1 ثلاث ثواني. احسب متوسط زمن إرسال الرسالة الواحدة للمصدر في كل من شفرتى R و S-F وقارن بينهما.

أجوبة تمرينات
الفصل الأول

أجوبة تمرينات رقم ١

1—1. i) $I = -\log 0.5 = \log 2 = 1$ bit (احتمالان متساويان)

ii)a. $I = \log 7 = 2.807355$ bits (٧ احتمالات متساوية)

b. $I = \log 7 + \log \overline{12} + \log N$ $(N = 29 \text{ or } 30)$: بفرض الاستقلال

$= 11.25029 \rightarrow 11.2992$ bits

1—2.i) $I_i = \{-\log 0.3, -\log 0.5, -\log 0.2\}$

$= \{1.737, 1, 2.322\}$ bits

ii) $H = -0.3 \log 0.3 - 0.5 \log 0.5 - 0.2 \log 0.2$

$= 1.485475$ bits/ symbol

1—3.i) $H(X) = 0.811278$

ii) $H(Y) = 1.326764$ $[\ \{q_j\} = \{0.1375, 0.6125, 0.25\}\ ]$

iii) $H(X \mid Y) = 0.741816$

$$\left[P(X \mid Y) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ \\ x_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.4545 & 0.142857 & 0.4 \\ & & \\ 0.5454 & 0.857143 & 0.6 \end{pmatrix} \end{array} \right]$$

iv) $H(X,Y) = 2.06858$ $[\ = H(Y) + H(X \mid Y)\ ]$

v) $H(X \mid Y) < H(X)$

القيمة المتوسطة للمعلومات الشرطية دائماً لا تتعدى القيمة المتوسطة

للمعلومات غير الشرطية.

1 — 4 $H = -2 \times 0.45 \log 0.45 - 0.1 \log 0.1$

$= 1.368996$ bits/symbol

1 — 5. i) $q_1 \equiv Pr(0) = 0.4 \times 0.8 + 0.6 \times 0.1 = 0.38$

ii) $q_2 \equiv Pr(1) = 1 - q_1 = 0.62$

iii) $H(Y) = -0.38 \log 0.38 - 0.62 \log 0.62$

$= 0.958042$ bits/symbol

iv) $H(Y|X) = -0.32 \log 0.8 - 0.08 \log 0.2 - 0.06 \log 0.1 - 0.54 \log 0.9$

$= 0.5701685$ bits/symbol.

1 — 6. i) $H = -0.7 \log 0.7 - 0.2 \log 0.2 - 0.1 \log 0.1$

$= 1.157$ bits/symbol

ii) $$\begin{pmatrix} X' \\ P' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA, & AB, & AC, & BA, & BB, & BC, & CA, & CB, & CC \\ .49, & .14, & .07, & .14, & .04, & .02, & .07, & .02, & .01 \end{pmatrix}$$

$H' = - \Sigma\, p' \log p'$

$= -.49 \log .49 - \cdots\cdots - .01 \log .01$

$= 2.314\ (= 2H).$

1 - 7 $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$q_1 = \frac{1}{6} = q_2 = \cdots = q_6$$

$$H(Y) = \log 6$$

$$H(Y \mid X) = -6 \times \frac{1}{6} \log \frac{1}{2} = 1$$

$$I(X,Y) = H(Y) - H(Y \mid X) = \log 6 - 1 = 1.585$$

1 - 8 .i) & ii):

$$P(A) = \{0.35,\ 0.35,\ 0.15,\ 0.15\}$$

$$P(B) = \{0.35,\ 0.35,\ 0.3\}$$

$$P(B \mid A) = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & 0 & \frac{2}{7} \\ 0 & \frac{6}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.714 & 0 & 0.286 \\ 0 & 0.857 & 0.143 \\ 0.667 & 0.333 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

iii) a) $H(A) = -2 \times 0.35 \log 0.35 - 2 \times 0.15 \log 0.15 = 1.88129$

b) $H(B) = -2 \times 0.35 \log 0.35 - 0.3 \log 0.3 = 1.58127$

c) $H(A,B) = -\Sigma\, \pi_{ij} \log \pi_{ij} = 2.52806$

d) $H(B \mid A) = H(A,B) - H(A) = 0.64677$

e) $I(A,B) = H(B) - H(B \mid A) = 0.93450$

1 - 9 $\quad P(Y) = \{0.75,\ 0.25\}$

$$H(Y) = 0.81128$$

$$P(X) = \{0.15,\ 0.8,\ 0.05\}$$

$$P(Y \mid X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.75 & 0.25 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [\, q_{ij} = \frac{\pi_{ij}}{p_i} \,]$$

$$H(Y \mid X) = -0.6 \log 0.75 - 0.2 \log 0.25 = 0.64902$$

$$I(X,Y) = H(Y) - H(Y \mid X) = 0.16226$$

1 - 10. a)

$$P(Y|X) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha + \beta = 1 \qquad \text{(i)}$$

$$P(X,Y) \equiv \Pi = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{4} & \frac{\beta}{4} \\ \frac{\beta}{2} & \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{4} & \frac{\beta}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow P(Y) = \left\{ \frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha+\beta}{2} \right\}$$

Independence $\Rightarrow P(Y|X) = P(Y) \Rightarrow$

e.g. $p(y_1|x_1) = p(y_1) : \alpha = \frac{\alpha + \beta}{2} \Rightarrow \alpha = \beta$ (ii)

(i) & (ii) $\Rightarrow \alpha = \beta = 0.5$

b) $P(Y) = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\} \Rightarrow H(Y) = 1$

$$H(X) = -\frac{1}{4}\log\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\log\frac{1}{4} = 1.5$$

c) $H(X,Y) = H(X) + H(Y) = 2.5$

1 - 11.a) $I($س$) = I($ع$) = -\log 0.2 = 2.3219$ bits

$I($ص$) = -\log 0.6 = 0.7370$ bits

b) $H(S) = -2 \times 0.2 \log 0.2 - 0.6 \log 0.6 = 1.3710$

bits | symbol

c) $\begin{pmatrix} S^2 \\ P(S^2) \end{pmatrix} =$

س س	س ص	س ع	ص س	ص ص
.04	.12	.04	.12	.36

$$\begin{pmatrix} \text{ع ع} & \text{ع ص} & \text{ع س} & \text{ص ع} \\ .04 & .12 & .04 & .12 \end{pmatrix}$$

$$H(S^2) = 4(-.04 \log .04) + 4(-.12 \log .12) - .36 \log .36$$
$$= 2.7422 \quad \text{bits/symbol}$$
$$H(S^2) \cong 2H(S)$$

1 - 12.a) تحت الإضافة: المعلومات التي نحصل عليها من تجربتين تُجريان معاً أقلُّ من أو تساوي مجموع المعلومات التي نحصل عليها من كل تجربة على حدة.

الإضافة: المعلومات التي نحصل عليها من تجربتين مستقلتين تُجريان معاً تساوي مجموع المعلومات التي نحصل عليها من كل تجربة على حدة.

الفارق: هل التجربتان مستقلتان (الإضافة) أم لا (تحت الإضافة)

b) $P(X) = \{0.25, 0.4, 0.15, 0.05\}$

$P(Y) = \{0.35, 0.35, 0.2, 0.1\}$

$p(x_1, y_1) = 0.25,$

$p(x_1).\ p(y_1) = 0.25 \times 0.35 \neq p(x_1, y_1) \Rightarrow$

X,Y dependent $\Rightarrow H(X,Y) < H(X) + H(Y)$ (تحت الإضافة)

1 - 13.1) $q_1 \equiv p(y_1) = p(0) = \frac{1}{2}.\ (1 - \varepsilon) + \frac{1}{2}.\ \varepsilon = \frac{1}{2}$

$q_2 \equiv p(1) = 1 - q_1 = \frac{1}{2}$

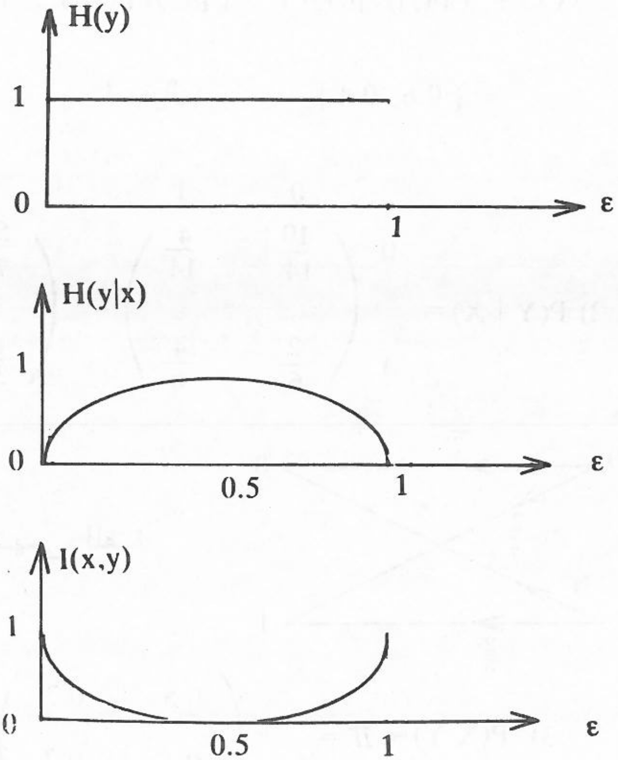
2) a) $H(Y) = 1$

b)
$$Q = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1-\varepsilon \end{pmatrix} \Rightarrow \Pi = \begin{pmatrix} \frac{1-\varepsilon}{2} & \frac{\varepsilon}{2} \\ \frac{\varepsilon}{2} & \frac{1-\varepsilon}{2} \end{pmatrix}$$

$$H(Y \mid X) = -\sum \pi_{ij} \log q_{ij}$$
$$= -\varepsilon \log \varepsilon - (1-\varepsilon) \log (1-\varepsilon) \equiv H(\varepsilon)$$

c) $I(X,Y) = H(Y) - H(Y \mid X)$
$$= 1 + \varepsilon \log \varepsilon + (1-\varepsilon) \log (1-\varepsilon)$$

3)



4) عندما $\varepsilon = 0.5$ فإن $I = 0$ وذلك إما من الرسم أو من المعادلة

$$I = H(Y) - H(Y \mid X) = 1 - 1 = 0$$

معنى أن $\varepsilon = 0.5$ أن احتمال وصول أي عنصر صحيحاً يساوي احتمال

وصوله خطأ، وبالتالي فالقناة لا فائدة منها ولا تنقل أي معلومات (الضوضاء شديدة جداً فكل المعلومات المستقبلة ضوضاء)

$$1 - 14.1)\ P(X) = \{\, p(x_1), p(x_2) \ = \{\, p(0), p(1) \,\}$$

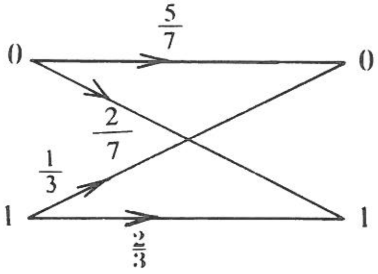
$$= \{\, \frac{14}{20}, \frac{6}{20} \,\}$$

إرسال: $= \{\, 0.7,\ 0.3 \,\}$

$$P(Y) = \{\, p(y_1), p(y_2) \,\} = \{\, p(0), p(1) \,\} = \{\, \frac{12}{20}, \frac{8}{20} \,\}$$

استقبال: $= \{\, 0.6,\ 0.4 \,\}$

$$2)\ P(Y \mid X) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{10}{14} & \frac{4}{14} \\ \frac{2}{6} & \frac{4}{6} \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$



المخطط السهمي للقناة

$$3)\ P(X,Y) \equiv \pi = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$4)\ P(X \mid Y) \equiv R = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$H(X \mid Y) = -0.5 \log \frac{5}{6} - 0.1 \log \frac{1}{6} - 2 \times 0.2 \log \frac{1}{2}$$

$$= 0.78999 \quad \text{bits/symbol}$$

5) $H(X) = -0.7 \log 0.7 - 0.3 \log 0.3 = 0.8813$ bits/symbol

$$I(X,Y) = H(X) - H(X \mid Y) = 0.09131 \text{ bits/symbol}$$

1 - 15.a) $p_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow H(p_1) = -\frac{1}{3} \log \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \log \frac{2}{3} = 0.9182$

$$p_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow H(p_2) = -\frac{1}{4} \log \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \log \frac{3}{4} = 0.8113$$

$$p_3 = \frac{p_1 + p_2}{2} = \frac{7}{24} \Rightarrow H(p_3) = 0.8709$$

$$\frac{H(p_1) + H(p_2)}{2} = 0.86475 < 0.8709 \equiv H\left(\frac{p_1 + p_2}{2}\right)$$

b) من منحنى الدالة $H(p)$ نرى أن علاقة التساوي في المتباينة (*)

تتحقق عندما:

$$p_1 = 1 - p_2 \quad \text{أو} \quad p_1 = p_2$$

1 - 16.1)

$$P(Y \mid X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, P(X) = \begin{pmatrix} p \\ 1-p \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$P(X,Y) = \begin{pmatrix} p & 0 \\ \frac{1-p}{2} & \frac{1-p}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow P(Y) = \left\{\frac{1+p}{2} \ \frac{1-p}{2}\right\}$$

$$\begin{aligned} I(X,Y) &= H(Y) - H(Y \mid X) \\ &= -\frac{1+p}{2} \log \frac{1+p}{2} - \frac{1-p}{2} \log \frac{1-p}{2} - 1 + p \end{aligned}$$

2) $\frac{dI}{dp} = 0$ كي تكون قيمة المعلومات المتبادلة I أكبر ما يمكن نجعل

$$\frac{1}{\ln 2}\left[-\frac{1+p}{2}\cdot\frac{2}{1+p}\cdot\frac{1}{2}-\left(\ln\frac{1+p}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}-\frac{1-p}{2}\cdot\frac{2}{1-p}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right.$$

$$\left.-\left(\ln\frac{1-p}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\right]+1=0$$

$$\Rightarrow p = 0.6$$

$$C \equiv \max I = I\,\big|_{p=0.6} = -0.8\log 0.8 - 0.2\log 0.2 - 0.4$$

$$= 0.3219$$

3) $H(X) = H_2(0.6,\ 0.4) = H(0.6) = H(0.4) = 0.9710$

$P(Y) = \{\ 0.8,\ 0.2\ \} \quad \Rightarrow H(Y) = H(0.2) = 0.7219$

$I = H(Y) - H(Y \mid X) \Rightarrow H(Y \mid X) = H(Y) - I = 0.4$

$I = H(X) - H(X \mid Y) \Rightarrow H(X \mid Y) = H(X) - I = 0.6491$

1-17 1) $I(J) = -\log 0.001 = 9.9658$ bits,
$I(I) = 4.1078$, $I(H) = 4.4112$,
$I(A) = 3.9658$, $I(D) = 4.9658$

2) a) $I_{total1} = \Sigma I = 27.4164$ bits
b) $I_{total2} = 5H = 5 \times 4.03 = 20.15$ bits

ملاحظة: الفارق بين القيمتين كبير نسبياً لأن عدد رموز رسالة المصدر صغير، وطريقة حساب القيمة الكلية للمعلومات بضرب عدد الرموز في القيمة المتوسطة لمعلومات المصدر تعطي قيمة قريبة من النتيجة الصحيحة عندما يكون عدد رموز الرسالة كبيراً، وهي تعطي النتيجة الصحيحة عندما يؤول عدد هذه الرموز إلى اللانهاية.

3) $I(*) = 21H = 21 \times 4.03 = 84.63$ bits

1-18.1) 1) $p = 1/2^{nk}$

2) $I(p) = -\log p = \log 2^{nk} = nk$ bits

3) $I = nk = 45 \times 45 = 2025$ bits

4) $I = \log 7 + \log 31 + \log 12$
$= 11.3463$ bits

1-19.a) $P(Y) = \left\{\frac{7}{12}, \frac{5}{12}\right\}$, $H(Y) = .9798695$,
$H(Y|X) = .9182947$, $I_1(X,Y) = .0615748$

b) $P(Y) = \{0.5, 0.5\}$,$(X,Y) = 1$,
$H(Y|X) = .9183$, $I_2(X,Y) = 0.0817$
$I_1/I_2 = .0616/.0817 = 0.754$

1-20.1) $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow H(Y|X) = 0$, noiseless.

2) $H(Y) = \max \Rightarrow q_1 = q_2 = \frac{1}{2}$

3) $C = I_{max} = H_{max}(Y) = 1$

4) $\pi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \\ 0 & 1-\alpha-\beta \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha+\beta = 1-\alpha-\beta$

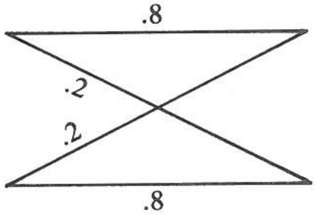
$\Rightarrow \alpha+\beta = \frac{1}{2}$

$P(X) = \left\{\alpha, \frac{1}{2} - \alpha, \frac{1}{2}\right\}$

1-21.a) $Q = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix} \Rightarrow \pi = \begin{pmatrix} \frac{1-p}{2} & \frac{p}{2} \\ \frac{p}{2} & \frac{1-p}{2} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \{q_i\} = \{0.5, 0.5\} \Rightarrow I = 1 - H(p)$

b) 1) $Q = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{16}{20} & \frac{4}{20} \\ \frac{2}{10} & \frac{8}{10} \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} .8 & .2 \\ .2 & .8 \end{pmatrix}$



2) $P = \left\{p_1, p_2\right\} = \{p(A), p(B)\} = \left\{\frac{20}{30}, \frac{10}{30}\right\} = \left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right\}$

ii) $$\pi = \begin{pmatrix} \frac{16}{30} & \frac{4}{30} \\ \frac{2}{30} & \frac{8}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{15} & \frac{2}{15} \\ \frac{1}{15} & \frac{4}{15} \end{pmatrix}$$

iii) $$\left\{q_j\right\} = \left\{\frac{9}{15}, \frac{6}{15}\right\} = \{0.6, 0.4\}$$
$$= \{p(a), p(b)\}$$

i) $$R = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & \frac{2}{6} \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

c) $$I = 1 - H(0.2) = 1 - .7219 = .2781$$

نعم، القيمة تتفق مع القيمة من المنحنى. أي اختلاف يكون بسبب: التقريب العددي في حساب القيمة، وعدم الدقة في قراءة القيمة من المنحنى.

d) أي رسالة مستقبلة تحقق احتمال الخطأ (p=.2) في القناة م الثنائية المتماثلة، مثل:

$$a\,a\,a\,a\,a\,a\,a\,a\,\underbrace{b\,b\,a\,a}\,b\,b\,b\,b\,b\,b\,b\,b$$

1-22 a) $$H(X) = H(.2) = .7219 \text{ bits/symbol}$$
$$H(Y) = H_3(.1, .3, .6) = 1.2955 \text{ bits/symbol}$$
$$H(X, Y) = H(X) + H(Y) = 2.0174 \text{ bits/symbol}$$

b) 1) $Q = \begin{pmatrix} .1 & .3 & .6 \\ 0 & .2 & .8 \end{pmatrix} \Rightarrow \pi \begin{pmatrix} .02 & .06 & .12 \\ 0 & .16 & .64 \end{pmatrix}$

$H(Y|X) = 0.8366$

2) $H(X,Y) = H(X) + H(Y|X)$

$= 1.5585$ bits/symbol

Diff $= 0.4589$

1-23 $L = -\sum_i p_i \log p_i \quad , \quad R = -\sum_i p_i \log q_i$

$$L - R = \sum_i p_i (\log q_i - \log p_i) = \sum_i p_i \log \frac{q_i}{p_i}$$

$$= \log e \sum_i p_i \ln \frac{q_i}{p_i}$$

$$\leq \log e \sum_i p_i \left(\frac{q_i}{p_i} - 1 \right)$$

$$= \log e \sum_i (q_i - p_i) = \log e \left(\sum_i q_i - \sum_i p_i \right)$$

$$= \log e (1 - 1) = 0 \Rightarrow L \leq R$$

1-24 $H(S) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$

$S' = \{ s'_1, s'_2, \dots, s'_n, s'_{n+1}, s'_{n+2}, \dots, s'_{2n} \}$

$P(s') = \{ (1-\varepsilon)p_1, (1-\varepsilon)p_2, \dots, (1-\varepsilon)p_n, \varepsilon p_1, \varepsilon p_2, \dots, \varepsilon p_n \}$

$$H(S') = -\sum_{i=1}^{2n} p'_i \log p'_i$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} p'_i \log p'_i - \sum_{i=n+1}^{2n} p'_i \log p'_i$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} (1-\varepsilon) p_i \log (1-\varepsilon) p_i - \sum_{i=n+1}^{2n} \varepsilon p_{i-n} \log \varepsilon p_{i-n}$$

$$= (1-\varepsilon) \left[-\sum_{i=1}^{n} p_i (\log (1-\varepsilon) + \log p_i) \right]$$

$$+\varepsilon\left[-\sum_{i=n+1}^{2n} p_{i-n}(\log\varepsilon + \log p_{i-n})\right]$$

$$= (1-\varepsilon)\left[-\log(1-\varepsilon).\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i\right]$$

$$+\varepsilon\left[-\log\varepsilon.\sum_{i=n+1}^{2n} p_{i-n} - \sum_{i=n+1}^{2n} p_{i-n}\log p_{i-n}\right]$$

$$= (1-\varepsilon)[-\log(1-\varepsilon) + H(S)]$$

$$+\varepsilon\left[-\log\varepsilon.\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i\right]$$

$$= -\varepsilon\log\varepsilon - (1-\varepsilon)\log(1-\varepsilon) + H(S)$$

$$= H(S) + h(\varepsilon) \qquad (h \equiv \text{entropy fn.})$$

1-25 **إثبات العلاقة (*)**

$$RHS = -(p_1+p_2)\log(p_1+p_2) - \sum_{i=3}^{n} p_i \log p_i$$

$$+(p_1+p_2)\left[-\frac{p_1}{p_1+p_2}\log\frac{p_1}{p_1+p_2} - \frac{p_2}{p_1+p_2}\log\frac{p_2}{p_1+p_2}\right]$$

$$= -(p_1+p_2)\log(p_1+p_2) - \sum_{i=3}^{n} p_i \log p_i$$

$$-p_1[\log p_1 - \log(p_1+p_2)] - p_2[\log p_2 - \log(p_1+p_2)]$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i \equiv LHS$$

إثبات العلاقة (**)

$$LHS = -p(1-q)\log p(1-q) - pq\log pq - \sum_{i=3}^{n} p_i \log p_i$$

$$= -p(1-q)[\log p + \log(1-q)] - pq[\log p + \log q]$$

$$-\sum_{i=3}^{n} p_i \log p_i$$

$$= -p\log p - p(1-q)\log(1-q) - pq\log q - \sum_{i=3}^{n} p_i \log p_i$$

$$= -p\log p - \sum_{i=3}^{n} p_i \log p_i + p[-(1-q)\log(1-q) - q\log q]$$

$$= \text{RHS}$$

1−26 a) $H(Y|X) = 0$

لأنه لأي قيمة x_i تتحدد بالضبط القيمة المقابلة لها y_j

b) $H(Y) + H(X|Y) = H(X) + H(Y|X)$

$$\stackrel{(a)}{=} H(X) + 0 = H(X)$$

ونظراً لأن: $H(X|Y) \geq 0$

فلذلك: $\Rightarrow H(Y) \leq H(X)$

c) $H(Y) + H(X|Y) \stackrel{(b)}{=} H(X)$

$$\Rightarrow H(Y) = H(X) \text{ if } H(X|Y) = 0$$

وهذا يعني أنه لأي قيمة y_j توجد قيمة واحدة بالضبط x_i تقابلها من قيم X.

d) يجب أن تكون الدالة f تَقابُلاً واحداً لواحد (1-1 correspondence).

أجوبة تمرينات
الفصل الثاني

أجوبة تمرينات رقم ٢

2—1 $C_{human} = \frac{500 \times 5}{60} = 41.6667$ bits/sec.

2—2 BSC with $\alpha = \frac{2}{3}$ $\quad (q_1 = \frac{7}{12} \ , \ q_2 = \frac{5}{12})$

$$C = 1 + \alpha \log \alpha + (1-\alpha) \log (1-\alpha) = 0.0817 \text{ bits/symbol}$$

$$I(X,Y) = H(Y) - H(Y|X) = 0.9798695 - 0.9182947$$

$$= 0.0615748 \quad \text{bits/symbol}$$

$$\text{Redundancy} = C - I = 0.02, \ \eta = \frac{I}{C} = 75.4\%.$$

2—3 BEC with $\alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow C = \alpha = \frac{1}{4}$ bits/symbol

2—4

$$P(Y \mid X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow H(Y \mid X) = 0 \Rightarrow I(X,Y) = H(Y) \Rightarrow$$

تصل I إلى قيمتها العظمى عندما تتساوى احتمالات عناصر Y.

$$\text{Let } P(X) = \begin{pmatrix} p \\ q \\ 1-p'-q' \end{pmatrix} \Rightarrow \pi = \begin{pmatrix} p & 0 \\ q & 0 \\ 0 & 1-p-q \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$q_1 = p+q \ , \ q_2 = 1-p-q$$

$$q_1 = q_2 \Rightarrow p+q = \tfrac{1}{2} \Rightarrow P(X) = \begin{pmatrix} p \\ \frac{1}{2} - p \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \ 0 < p < \tfrac{1}{2} .$$

2—5 BSC with $\alpha=0.75$, $t=1\ \mu$ sec.

i) $C = 1+ \alpha \log \alpha + (1 - \alpha)\log (1-\alpha) = 0.188722$ bits /symbol

$$C_t = \frac{C}{t} = 188722 \text{ bits/sec.}$$

ii)

القناة ث م (BSC) قناة منتظمة ولذلك فالتوزيع الاحتمالي المنتظم عند المدخل هو الذي يؤدي إلى بلوغ السعة، أي أن

$$P_1 = P_2 = 0.5$$

iii) $I(X,Y)= H(Y)- H(Y \mid X)$ $[q_1 = \frac{7}{12}, q_2 = \frac{5}{12}]$

$$= 0.9798695 - 0.8112764 = 0.16859 \text{ bits/symbol}$$

$$= 0.16859 \times 10^6 \text{ bits/sec.}$$

2—6.a)

$$P(Y \mid X)= \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{uniform channel}$$

$$C = \log 3 + 2 \times 0.5 \log 0.5 = 0.5849$$

$$\because P_i = \frac{1}{n} \Rightarrow I = C$$

$$\therefore P_{max} = \{ \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3} \}$$

b) $\eta = \frac{I}{c}$, $I = H(Y) + \Sigma_j\ q_{ij} \log q_{ij}$

$$\pi = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0 \\ 0.15 & 0 & 0.15 \\ 0 & 0.05 & 0.05 \end{pmatrix} \Rightarrow P(Y)= \{0.45, 0.35, 0.2\}$$

$$I = 1.5129 + (0.5 \log 0.5) \times 2 = 0.5129$$

$$\eta = 87.69\%$$

2—7.i) كل القنوات المعطاة منتظمة ولذلك فالتوزيع الاحتمالي الأمثل لكل منها هو التوزيع المنتظم، والسعة تعطى بالعلاقة:

$$C = \log m + \Sigma_j q_{ij} \log q_{ij} \text{ for any } i$$

$$C_a = \log 4 + 2 \times \tfrac{1}{3} \log \tfrac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{6} \log \frac{1}{6} = 0.081704;$$

$$P_{max} = \{\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\}$$

$$C_b = \log 3 + 0.6 \log 0.6 + 2 \times 0.2 \log 0.2 = 0.214012;$$

$$P_{max} = \{\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\}$$

$$C_c = \log 4 + (1-\varepsilon)\log(1-\varepsilon) + \varepsilon \log \varepsilon; \; P_{max} = \{\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}\}$$

ii)

$$P(Y \mid X) = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}, \; P(X) = \begin{pmatrix} \tfrac{1}{2} \\ \tfrac{1}{4} \\ \tfrac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\pi = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.1 \\ 0.05 & 0.15 & 0.05 \\ 0.05 & 0.05 & 0.15 \end{pmatrix} \Rightarrow P(Y) = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.3 \\ 0.3 \end{pmatrix}$$

$$H(Y) = 1.571, \; H(Y \mid X) = 1.371 \Rightarrow$$

$$I(X,Y) = 0.2, \; \eta = \frac{I}{C_b} = 93.45\%$$

$$\text{Redundancy} = C_b - I = 0.014$$

2—8. a) القناة Z :

من حل المسألة رقم 16—1 نرى أن:

$$C = 0.3219, \; P_{max} = \{0.6, 0.4\}$$

حل آخر: القناة Z يمكن اعتبارها قناة ثنائية عامة GBC حيث

$$\alpha = 1 \ , \ \beta = 0.5$$

$$p = \frac{1}{0.5-1}\left[0.5 - \frac{1}{1+2^{\frac{H(0.5)-H(1)}{0.5-1}}}\right] = 0.6 \Rightarrow$$

$$P_{max} = \{0.6, 0.4\}$$

$$C = \frac{1\times H(0.5) - 0.5H(1)}{0.5-1} + \log\left[1 + 2^{\frac{H(1)-H(0.5)}{0.5-1}}\right]$$

$$= -2 + \log 5 = 0.3219$$

b) القناة عديمة المفقودات

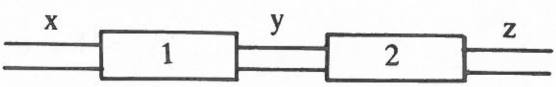
$$C = \log n = \log 3 = 1.5849 \text{ bits/symbol}$$

$$I = H(x) \Rightarrow \text{For max } I \ : \ P_{max} = \{\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\}$$

2 — 9 .a) سعة قناة الاتصال هي أقصى قيمة للمعلومات (أو لمعدل المعلومات) المتبادلة بين جهة الإرسال وجهة الاستقبال، أي أقصى قيمة ممكنة للمعلومات التي ترسل عبر القناة من جهة الإرسال للاستقبال.

b) سعة القناة المكافئة تكون أكبر إذا كانت القناتان متصلتين على التوازي وذلك لأنه:

أ) في حالة التوالي:

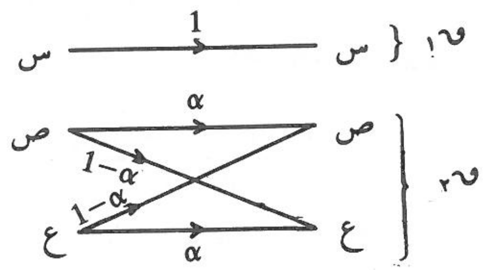


$$\left.\begin{array}{l} I(X,Z) \leqslant I(X,Y) \Rightarrow C \leqslant C_1 \\ I(X,Z) \leqslant I(Y,Z) \Rightarrow C \leqslant C_2 \end{array}\right] \Rightarrow C \leqslant C_1, \ C_2$$

ii) في حالة التوازي:

$$\left.\begin{array}{l} C = \log (2^{C_1} + 2^{C_2}) \geqslant \log 2^{C_1} = C_1 \Rightarrow C \geqslant C_1 \\ C = \log (2^{C_1} + 2^{C_2}) \geqslant \log 2^{C_2} = C_2 \Rightarrow C \geqslant C_2 \end{array}\right\} \Rightarrow C \geqslant C_1, C_2$$

c)



١) القناة المعطاة تكافىء قناتين ق١، ق٢ متصلتين على التوازي كما هو موضح بالشكل.

ق١ : قناة مثالية

$$C_1 = \log n = \log 1 = 0$$

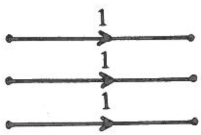
ق٢ : قناة ثنائية متماثلة BSC

$$C_2 = 1 + \alpha \log \alpha + (1 - \alpha) \log (1 - \alpha) \equiv 1 - H(\alpha)$$

$$\therefore\ C = \log [2^0 + 2^{1-H(\alpha)}] = \log (1 + 2^{1-H(\alpha)}]$$

$$C|_{\alpha = 1} = \log 3$$

وهذه النتيجة متوقعة لأنه عندما ١ = α فإن القناة المعطاة تكون قناة مثالية، فيها $n = 3$ وبذلك



$$C = \log n = \log 3$$

عندما $\alpha = 0.5$ تكون سعة كل من ق١، ق٢ تساوي صفراً حيث تصبح ق٢ قناة

$$C\Big|_{\alpha = 0.5} = 1$$

عديمة الفائدة: احتمال وصول الرمز صحيحاً يساوي احتمال وصوله خاطئاً.

٢) لإيجاد التوزيع الاحتمالي الأمثل في الحالة $\alpha = \frac{1}{2}$

$$p_1 = 2^{(C_1 - C)} = 2^{0-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow p_2 = \frac{1}{2}$$

أي أن: احتمال اختيار القناة ق$_1$ = احتمال اختيار القناة ق$_2$ وبما أن القناة ق$_2$ ق ث م BSC أي منتظمة فهي تصل إلى سعتها عندما تكون مداخلها متساوية الاحتمالات، وبذلك نحصل على:

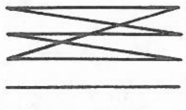
$$p(\text{س}) = \frac{1}{2} \quad , \quad p(\text{ص}) = \frac{1}{4} \quad , \quad p(\text{ع}) = \frac{1}{4}$$

2 — 10.a)

القناة (أ) عديمة المفقودات (حيث يوجد عنصر واحد فقط لا يساوي صفراً في أي عمود في مصفوفتها)

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.3 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

$$C = \log n = \log 3 = 1.5849$$

b) 

ق$_1$

ق$_2$

القناة(ب) تعتبر قناتين على التوازي واحدة منتظمة والأخرى مثالية

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$C_1 = \log 3 + (0.5 \log 0.5) \times 2 = 0.5849$$

$$C_2 \text{ (ideal)} = \log n = \log 1 = 0$$

$$C = \log (2^{0.5849} + 2^0) = \log 2.5 = 1.3219$$

c) القناة (جـ) منتظمة

$$C = \log 4 + 2 \times \frac{1-p}{2} \log \frac{1-p}{2} + 2 \times \frac{p}{2} \log \frac{p}{2}$$
$$= 1 - H(p)$$

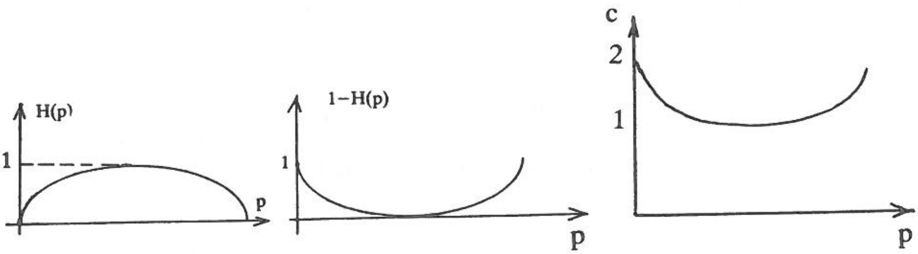
d) القناة (د) قناة محو ثنائية BEC

$$C = 1 - p$$

2 — 11. I. a) uniform channel ⇒

$$C = \log 4 + (1-p) \log (1-p) + p \log p = 2 - H(p)$$

b)



c) uniform channel ⇒ $P_{optimal}(X) = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\}$

d) من منحنى تغير C مع p نرى أن C تصل إلى قيمتها العظمى

عندما p=1 أو p=0

والمعنى الطبيعي لهذه النتيجة أن القناة تكون سعتها أكبر ما يمكن عندما تكون مثالية

e $\eta = \frac{I}{C}$

$$C = 2 - H(0.2) = 1.2781$$

$$Q = \begin{pmatrix} .8 & .2 & 0 & 0 \\ .2 & .8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .8 & .2 \\ 0 & 0 & .2 & .8 \end{pmatrix} \Rightarrow \pi = \begin{pmatrix} .08 & .02 & 0 & 0 \\ .04 & .16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .24 & .06 \\ 0 & 0 & .08 & .32 \end{pmatrix}$$

$$P(Y) = \{0.12,\ 0.18,\ 0.32,\ 0.38\}$$

$$H(Y) = 1.8688$$

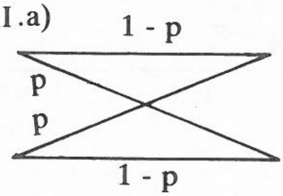
$$I_{uniform} = H(Y) + \Sigma\ q_{ij} \log q_{ij}$$

$$= 1.8688 - .8 \log .8 - .2 \log .2$$

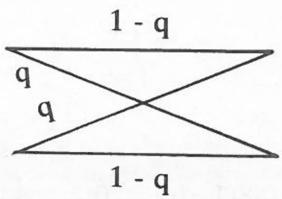
$$= 1.8688 - H(0.2) = 1.1469$$

$$\eta = 89.735\%$$

II.a)



هذه القناة يمكن اعتبارها قناتين متصلتين على التوازي وكل منها قناة ثنائية متماثلة BSC



$$C_1 = 1 - H(p)$$

$$C_2 = 1 - H(q)$$

$$C = \log\left(2^{1-H(p)} + 2^{1-H(q)}\right)$$

$$C|_{q=p} = \log\left(2.2^{1-H(p)}\right) = \log 2^{2-H(p)} = 2 - H(p)$$

وهي نفس النتيجة السابقة.

$$C|_{p=.2,\ q=.3} = 1.2006$$

ب) $p_1 = 2^{C_1 - C} = 2^{.2781 - 1.2006} = 0.52759383$

$p_2 = 2^{C_2 - C}$ or $p_2 = 1 - p_1 = 0.47240617$

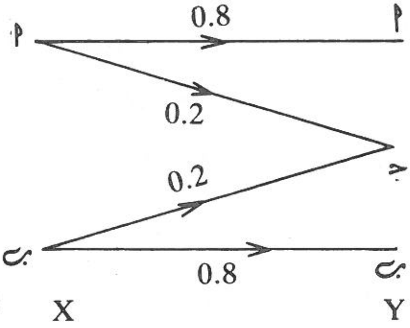
وبما أن كلاً من القناتين قناة ثنائية متماثلة، فهي تبلغ سعتها عندما يكون احتمالا المدخلين متساويين. . والقناة الأصلية تبلغ سعتها عندما تبلغ كل قناة من قنواتها الجزئية المتصلة على التوازي سعتها، وبالتالي:

$$p(x_1) = p(x_2) = \frac{p_1}{2} = 0.263796915$$

$$p(x_3) = p(x_4) = \frac{p_2}{2} = 0.236203085$$

2 - 12.1)

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$$



Let $P(x) = \{p,\ 1-p\}$

$$\pi = \begin{pmatrix} 0.8p & 0 & 0.2p \\ 0 & 0.8(1-p) & 0.2(1-p) \end{pmatrix} \qquad \text{BEC}$$

$$P(Y) = \{0.8p,\ 0.8(1-p),\ 0.2\}$$

$$[q_1 = q_2 = q_3 = \tfrac{1}{3}] \Rightarrow [0.8p = 0.8(1-p) = \underbrace{0.2 = \tfrac{1}{3}}]$$

هذا غير ممكن، وبالتالي لا توجد أي قيمة للمتغير p تجعل التوزيع الاحتمالي عند المخرج منتظماً.

2) $$p_i = \frac{1}{n} \Rightarrow q_j = \sum_i \pi_{ij} = \sum_i p_i\, q_{ij} = \sum_i \frac{1}{n}\, q_{ij}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_i q_{ij}$$

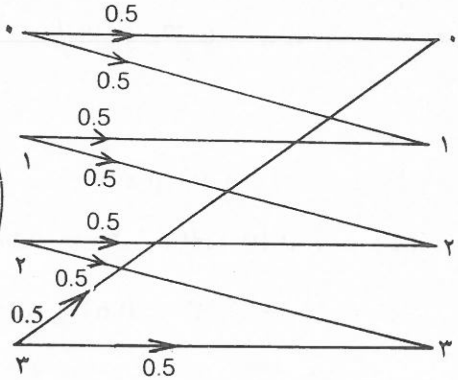
المجموع $\Sigma_i\, q_{ij}$ يمثل مجموع عناصر العمود رقم j في مصفوفة القناة،ونظراً لأن كل الأعمدة متماثلة ـ ما عدا ترتيب العناصر في العمود ـ لأن القناة منتظمة ، فيكون مجموع عناصر أي عمود مساوياً لمجموع عناصر أي عمود آخر، وبالتالي مساوياً لمجموع عناصر كل المصفوفة مقسوماً على عدد الأعمدة في المصفوفة، أي مساوياً $\frac{n}{m}$ (ملاحظة :

مجموع عناصر كل المصفوفة يساوي n لأن بها n صف ومجموع عناصر كل صف يساوي ١)

$$\therefore\ q_j = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{m} = \frac{1}{m};\ j = 1,2,\ldots,m$$

3)

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$



القناة منتظمة

$$C = \log 4 + (0.5 \log 0.5) \times 2$$
$$= 1 \text{ bit/symbol}$$

$$p_i = \frac{1}{n} \Rightarrow I = C \quad \therefore\ P(x) = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right\}$$

4) $C_{BEC} = \alpha = 0.8$ bits/symbol

2—13.a) BEC $\Rightarrow C_2 = \alpha = 1-\varepsilon$

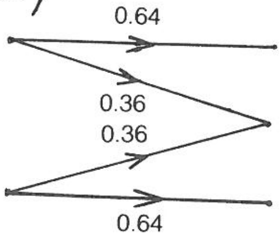
b) $$\begin{pmatrix} 1-\varepsilon & \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon & 1-\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\varepsilon & \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 1-\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\varepsilon)^2 & \varepsilon(2-\varepsilon) & 0 \\ 0 & \varepsilon(2-\varepsilon) & (1-\varepsilon)^2 \end{pmatrix}$$

القناة المركبة أو المكافئة عبارة عن قناة محو ثنائية BEC

$$C = \alpha = (1 - \varepsilon)^2$$

c) $\varepsilon = 0.2 \Rightarrow \quad Q = \begin{pmatrix} 0.64 & 0.36 & 0 \\ 0 & 0.36 & 0.64 \end{pmatrix}$

$$\pi = \begin{pmatrix} 0.16 & 0.09 & 0 \\ 0 & 0.27 & 0.48 \end{pmatrix}$$



$P(Y) = \{0.16,\ 0.36,\ 0.48\}$

$H(Y) = 1.4619\ , H(Y \mid X) = 0.9427\ ,\ I = 0.5192$

$$C = (1 - 0.2)^2 = 0.64\ ,\ \eta = \frac{I}{C} = 81.12\%$$

2—14 $I(X,Y) = H(X) - H(X \mid Y)$

$I(X,Z) = H(X) - H(X \mid Z)$

$H(X \mid Y) = -\Sigma\, p(x,y) \ . \log p(x|y)$

$H(X \mid Z) = -\Sigma\, P(x,z) \ . \log P(x/z)$

$P(Y \mid X) = P(Z \mid X).\ P(Y \mid Z)$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}_{2\times 3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}_{3\times 3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}_{2\times 3} =$$

$= P(Z \mid X)$

Let $P(X) = \{p, 1-p\}$

$$\therefore P(X,Y) = \begin{pmatrix} \frac{p}{3} & \frac{p}{3} & \frac{p}{3} \\ 0 & \frac{1-p}{2} & \frac{1-p}{2} \end{pmatrix} = P(X,Z)$$

$$\Rightarrow P(Y) = \{ \frac{p}{3} , \frac{p}{3} + \frac{1-p}{2} , \frac{p}{3} + \frac{1-p}{2}\} = P(Z)$$

$$p(x \mid y) = \frac{p(x,y)}{p(y)} = \frac{p(x,z)}{p(z)} = p(x|z)$$

$$\Rightarrow H(X \mid Y) = -\Sigma\, p(x,y) \log p(x|y) = -\Sigma\, p(x,z) \log p\,(x|z)$$

$$= H(X|Z)$$

$$\Rightarrow I(X,Y) = I(X , Z) \quad \text{for any } P(X)$$

2—15.a) BSC: $\begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \beta = 1-\alpha \Rightarrow$

$$H(\beta) = H(1-\alpha) = -(1-\alpha)\log(1-\alpha) - \alpha \log \alpha = H(\alpha) \Rightarrow$$

$$C = \frac{\alpha H(\alpha) - (1-\alpha) H(\alpha)}{1-2\alpha} + \log [1 + 2^{\frac{H(\alpha)-H(\alpha)}{1-2\alpha}}] = 1 - H(\alpha)$$

$$p = \frac{1}{1-2\alpha} [1-\alpha - \frac{1}{1+1}] = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$P_{max} = \{ \frac{1}{2} , \frac{1}{2} \}$.

b) القناة (أ): قناة ثنائية متماثلة BSC حيث $x = 0.9$

i) $C = 1 - H(0.9) = 1 - H(0.1) = 0.531$ bits/symbol

ii) $P_{max} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ (قناة منتظمة)

iii) $\eta = 100\%$ since $P(x) = P_{max} \Rightarrow I = C \Rightarrow \eta = 1$.

القناة (ب): قناة ثنائية عامةGBC حيث $\alpha = 0.9,\ \beta = 0.3$

$$\text{i) } C = \frac{0.9H(0.3) - 0.3\,H(0.9)}{0.3-0.9} + \log [1 + 2^{\frac{H(0.9)-H(0.3)}{0.3-0.9}}$$

$= 0.2967$ bits/symbol

ii) $P = \frac{1}{0.3-0.9} \left[0.3 - \frac{1}{1+2^{\frac{H(0.3)-H(0.9)}{0.3-0.9}}}\right] = 0.5281$

$P_{max} = \{0.5281,\ 0.4719\}$

iii) $P(Y \mid X) = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}, \quad P(x) = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\} \Rightarrow$

$$\pi \equiv P(X,Y) = \begin{pmatrix} 0.45 & 0.05 \\ 0.15 & 0.35 \end{pmatrix} \Rightarrow P(y) = \{0.6,\ 0.4\}$$

$\Rightarrow H(Y) = H(0.4) = 0.9710$

$H(Y \mid X) = 0.6752$

$I(X,Y) = H(Y) - H(Y \mid X) = 0.2958$

$$\eta = \frac{I}{C} = 99.6967\%$$

القناة ق١:

2 — 16. a) $$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$$

هذه القناة عديمة المفقودات لأن كل عمود في مصفوفتها Q فيه رقم واحد لا يساوي صفراً.

$C_I = \log n = \log 2 = 1$ bit/symbol

القناة ق٢:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

هذه القناة عديمة الضوضاء لأن كل صف في مصفوفتها فيه رقم واحد لا يساوي صفراً

$C_{II} = \log m = \log 2 = 1$ bit/symbol

القناة ق٣ :
$$Q = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

$$\text{Let } P(X) = \{p, 1-p\} \Rightarrow \pi = \begin{pmatrix} p\alpha & p(1-\alpha) \\ (1-p)\alpha & (1-p)(1-\alpha) \end{pmatrix}$$

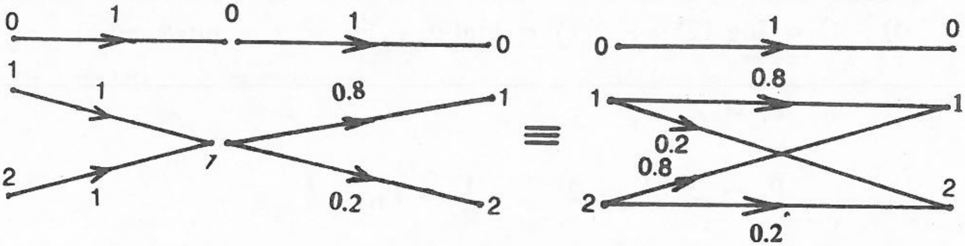
$$\Rightarrow P(Y) = \{\alpha, 1-\alpha\} \Rightarrow H(Y) = H(\alpha)$$

$$H(Y \mid X) = H(\alpha)$$

$$I(X,Y) = H(Y) - H(Y \mid X) = 0 \Rightarrow C_{III} = 0$$

ونسمّي هذه القناة قناة عديمة الفائدة حيث أن المعلومات المتبادلة خلالها تساوي صفراً.

b)
$$Q_{II} \cdot Q_{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0.2 \\ 0 & 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$$



القناة المكافئة يمكن اعتبارها قناتين متصلتين على التوازي:

الأولى مثالية وسعتها: $C_1 = \log n = \log 1 = 0$

والثانية مثل القناة ق٣ حيث $\alpha = 0.8$ وبالتالي سعتها: $C_2 = C_{III} = 0$

$$C = \log (2^{C_1} + 2^{C_2}) = \log 2 = 1 \text{ bit/symbol}$$

$$\pi = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.24 & 0.06 \\ 0 & 0.48 & 0.12 \end{pmatrix} \Rightarrow P(Y) = \{0.1,\ 0.72,\ 0.18\}$$

$$\Rightarrow H(Y) = 1.11869281$$

$$H(Y \mid X) = 0.64971$$

$$I(X,Y) = H(Y) - H(Y \mid X) = 0.468989$$

$$\eta = \frac{I}{C} = 46.8989\%$$

$$R = C - I = 0.53101719 \quad \text{bits/symbol}$$

c) $$Q_I \cdot Q_{II} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}_{2\times3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2\times2}$$

القناة المكافئة قناة مثالية وبالتالي سعتها: $0 \xrightarrow{1} 0$

$C = \log n = \log 2 = 1$ bit/symbol $1 \xrightarrow{1} 1$

d) $$C = \log\left(2^{C_I} + 2^{C_{II}}\right) = \log(2^1 + 2^1) = 2 \quad \text{bits/symbol}$$

$$P_i = 2^{C_i - C}$$

$$P_I = 2^{C_I - C} = 2^{1-2} = \tfrac{1}{2} \Rightarrow P_{II} = \tfrac{1}{2}$$

أي أن احتمال اختيار كل من القناتين ق١ ، ق٢ يساوي $\frac{١}{٢}$.

ثم لإيجاد الاحتمالات عند مداخل كل قناة:

القناة المكافئة تصل إلى سعتها عندما تصل كل قناة من القنوات على التوازي إلى سعتها

القناة ق٢ - وهي عديمة المفقودات - تصل إلى سعتها عندما تكون احتمالات المداخل متساوية.. وحيث أن لها مدخلين فيكون احتمال كل منهما مساوياً $\frac{١}{٤}$

القناة ق٢ - وهي عديمة الضوضاء - تصل إلى سعتها عندما تكون احتمالات المخارج متساوية.

نفرض أن احتمالات المداخل (بعد اختيار القناة) هي $\{p, q, 1-p-q\}$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \pi = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \\ 0 & 1-p-q \end{pmatrix}$$

$$q_1 = q_2 \Rightarrow p = 1-p \Rightarrow p = \tfrac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\{p, q, 1-p-q\} = \{\tfrac{1}{2}, q, \tfrac{1}{2}-q\} \; ; \; 0 \leqslant q \leqslant \tfrac{1}{2}$$

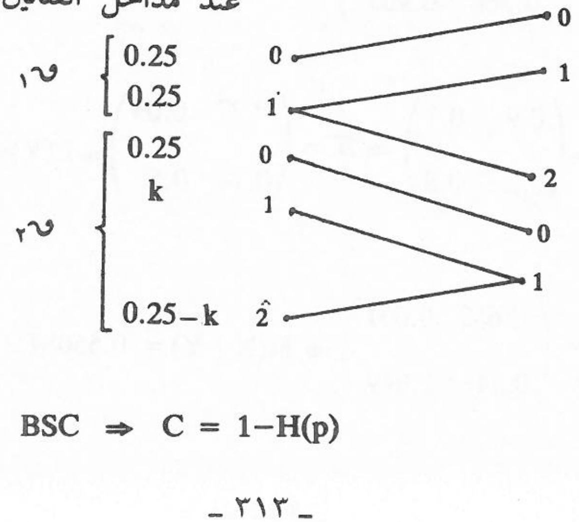
ونظراً لأن احتمال اختيار القناة يساوي $\frac{١}{٢}$، فتكون الاحتمالات عند مداخل القناة ق٢ هي:

$$\{\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2} q, \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2} q\} = \{\tfrac{1}{4}, k, \tfrac{1}{4}-k\} \; ; \; k \in [0, \tfrac{1}{4}]$$

النتيجة:

التوزيع الاحتمالي

عند مداخل القناتين



2—17.a) BSC $\Rightarrow$ C = 1−H(p)

b) $C = 0$ (قناة عديمة الفائدة ـ انظر القناة ق٣ في المسألة السابقة)

c) GBC : $\alpha = 1-p,\ \beta = q$ (note $= H(1-p) = H(p)$)

$$C = \frac{(1-p)\,H(q) - q\,H(p)}{q-1+p} + \log\left[1+2^{\frac{H(p)-H(q)}{q-1+p}}\right]$$

d) قناتان BSC على التوازي

$$C = \log\left(2^{1-H(p)} + 2^{1-H(q)}\right)$$

e) قناة منتظمة $\Rightarrow C = \log 4 + (1-p)\log(1-p) + p\log p$

$$= 2 - H(p)$$

2—18 $I(X,Y) = H(X) - H(X \mid Y)$

$\text{Max } I \Rightarrow \text{Min } H(X \mid Y)$ ($H(X)$ لا تختلف باختلاف القناة)

i) $Q_{BSC} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \Rightarrow \pi = \begin{pmatrix} 0.24 & 0.06 \\ 0.14 & 0.56 \end{pmatrix} \Rightarrow P(Y) = \{0.38, 0.62\}$

$\Rightarrow R = \begin{pmatrix} 0.632 & 0.097 \\ 0.368 & 0.903 \end{pmatrix} \Rightarrow H(X \mid Y) = 0.64518$

ii) $Q_{GBC} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \Rightarrow \pi = \begin{pmatrix} 0.27 & 0.03 \\ 0.14 & 0.56 \end{pmatrix} \Rightarrow P(Y) = \{0.41, 0.59\}$

$\Rightarrow R = \begin{pmatrix} 0.659 & 0.051 \\ 0.341 & 0.949 \end{pmatrix} \Rightarrow H(X \mid Y) = 0.55084$

iii) $Q_Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \Rightarrow \pi = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 \\ 0.14 & 0.56 \end{pmatrix} \Rightarrow P(Y) = \{0.44, 0.56\}$

$$\Rightarrow R = \begin{pmatrix} 0.682 & 0 \\ 0.318 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow H(X \mid Y) = 0.39705$$

iv) $Q_{BEC} = \begin{array}{c} \begin{matrix} y_1 & y_2 & e \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.9 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0.9 & 0.1 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow \pi = \begin{pmatrix} 0.27 & 0 & 0.03 \\ 0 & 0.63 & 0.07 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$P(y) = \{0.27, 0.63, 0.1\} \Rightarrow R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0.7 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$H(X \mid Y) = 0.08813$$

قناة المحو الثنائية BEC تعطى أقل قيمة للمفقودات H(X|Y)
وبالتالي أعلى قيمة للمعلومات المتبادلة I(X,Y).

2 — 19 $C_A = C_B = 1 - H(\alpha) = 1 - H(0.8) = 1 - H(0.2) = 0.2781$

$$P(Y \mid X) = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} = P(Z \mid Y)$$

$$P(Z \mid X) = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.68 & 0.32 \\ 0.32 & 0.68 \end{pmatrix}$$

أي أن القناة المكافئة للقناتين على التوالي هي أيضاً قناة ثنائيةمتماثلة BSC

$$C_{cascade} = 1 - H(0.68) = 1 - H(0.32) = 0.0956$$

$$C_{cascade} < C_A = C_B$$

ii) القناة الثنائية المتماثلة BSC قناة منتظمة uniform، ومن خصائص القناة المنتظمة أن التوزيع الاحتمالي المنتظم عند المدخل يؤدي إلى توزيع احتمالي منتظم عند المخرج ويؤدي كذلك إلى أن المعلومات المتبادلة I المرسلة عبر القناة تساوي سعة القناة C.

وحيث أن كلا من القناتين A,B والقناة المركبة المكافئة للقناتين على التوالي قناة ثنائية متماثلة، والتوزيع الاحتمالي عند المدخل X منتظم، فإن المعلومات المتبادلة خلال أي قناة من هذه القنوات الثلاث تساوي سعة القناة.

$$[p(x_1) = p(x_2) = \tfrac{1}{2}] \Rightarrow [p(y_1) = p(y_2) = \tfrac{1}{2}] \Rightarrow [p(z_1) = p(z_2) = \tfrac{1}{2}]$$

$$I_A \equiv I(X,Y) = C_A = 0.2781$$

$$I_B \equiv I(Y,Z) = C_B = 0.2781$$

$$I_{cascade} \equiv I(X,Z) = C_{cascade} = 0.0956$$

$$\eta_{cascade} = \frac{I_{cascade}}{C_{cascade}} = 1 \equiv 100\%$$

2 — 20.a) القناة منتظمة $\Rightarrow C_{(BSC)^2} = \log m + \sum_{j=1}^{m} q_{ij} \log q_{ij}$ for any i

$$C_{(BSC)^2} = \log 4 + \alpha^2 \log \alpha^2 + \alpha'^2 \log \alpha'^2 + \alpha\alpha' \log \alpha\alpha' + \alpha'\alpha \log \alpha'\alpha$$

$$= 2 + 2\,\alpha^2 \log \alpha + 2\,\alpha'^2 \log \alpha' + 2\alpha\alpha' \log \alpha + 2\alpha\alpha' \log \alpha'$$

$$= 2\,[\,1 + (\alpha^2 + \alpha\alpha')\log\alpha + (\alpha'^2 + \alpha\alpha')\log\alpha'\,]$$

$$= 2\,[\,1 + \alpha(\alpha + \alpha')\log\alpha + \alpha'(\alpha' + \alpha)\log\alpha'\,]$$

$$\alpha + \alpha' = 1$$

$$C_{(BSC)^2} = 2\,[\,1 + \alpha\log\alpha + \alpha'\log\alpha'\,]$$

$$= 2\,[\,1 + \alpha\log\alpha + (1-\alpha)\log(1-\alpha)]$$

$$= 2\,[\,1 - H(\alpha)]$$

$$= 2\,C_{BSC}$$

b) $$C_{(BSC)^2}\Big|_{\alpha = 0.8} = 2\,[1 - H(0.8)\,] = 2\,[\,1 - H(0.2)\,]$$

$$= 0.5562 \quad \text{bits/symbol}$$

2 - 21.a)

$$\begin{array}{c} \\ x_1x'_1 \\ x_1x'_2 \\ x_2x'_1 \\ x_2x'_2 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1y'_1 & y_1y'_2 & y_2y'_1 & y_2y'_2 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 0.72 & 0.18 & 0.08 & 0.02 \\ 0.18 & 0.72 & 0.02 & 0.08 \\ 0.08 & 0.02 & 0.72 & 0.18 \\ 0.02 & 0.08 & 0.18 & 0.72 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) $C_1\ (BSC) = 1 - H(0.1) = 0.5310$

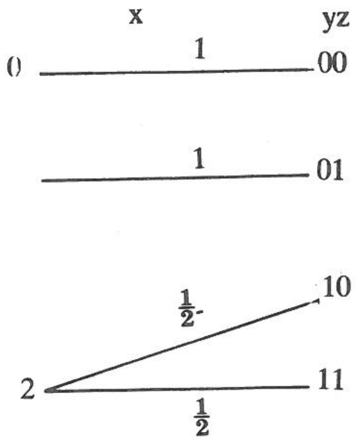
$C_2\ (BSC) = 1 - H(0.2) = 0.2781$

$$C\ (\text{uniform}) = \log 4 + 0.72\log 0.72 + 0.18\log 0.18 + 0.08\log 0.08 + 0.02\log 0.02$$

$$= 0.8091$$

$$C_1 + C_2 = 0.8091 = C$$

2 22.a)



$$\Rightarrow \begin{array}{c|cccc} & 00 & 01 & 10 & 11 \\ \hline 0 & & & & \\ 1 & & & & \\ 2 & & & & \end{array} \quad \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = P(YZ|X)$$

b) قناة عديمة المفقودات $\Rightarrow C = \log n = \log 3$

c) $H(X) = -\frac{1}{4}\log\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\log\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$

d) $P(Y \mid X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P(X,Y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow P(Y) = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$

$\Rightarrow H(Y) = 1$

$P(Z \mid X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow P(X,Z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow P(Z) = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$

$\Rightarrow H(Z) = 1$

$P(X,Y Z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow P(Y Z) = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\}$

$\Rightarrow H(Y Z) = \log 4 = 2$

e) $H(Y X) = 0 \Rightarrow I(X,Y) = H(Y) = 1$

$H(Z \ X) = -2\times\frac{1}{4}\log\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

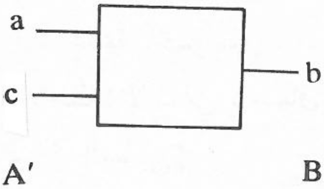
$$I(X,Z) = H(Z) - H(Z \mid X) = \tfrac{1}{2}$$

$$H(YZ|X) = -2 \times \frac{1}{4} \log \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$I(X,YZ) = H(YZ) - H(YZ|X) = 1\frac{1}{2}$$

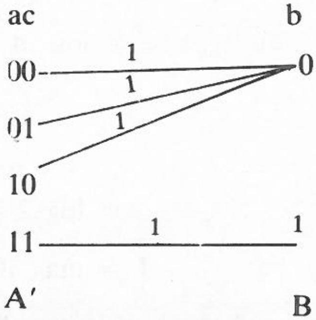
$$I(X,Y) + I(X,Z) = 1\frac{1}{2} = I(X,YZ)$$

2 - 23



Input Output

ac	b	
00	0	$\omega_1 \ \omega_2$
01	0	$\omega_1 \ \omega_2'$
10	0	$\omega_1' \ \omega_2$
11	1	$\omega_1' \ \omega_2'$



a) مصفوفة القناة $Q \equiv P(B|A') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ قناة عديمة الضوضاء

b) $I(A',B) \equiv H(B) - H(B|A') = H(B)$

$$\pi \equiv P(A',B) = \begin{pmatrix} \omega_1 \ \omega_2 & 0 \\ \omega_1 \ \omega_2' & 0 \\ \omega_1' \ \omega_2' & 0 \\ 0 & \omega_1' \ \omega_2' \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$q_1 = \omega_1 (\omega_2 + \omega_2') + \omega_1' \ \omega_2$$

$$= \omega_1 + \omega_1' \ \omega_2 \quad (\omega_1' = 1 - \omega_1, \ \omega_2' = 1 - \omega_2)$$

$$= \omega_1 + (1 - \omega_1)\,\omega_2 = \omega_1 + \omega_2 - \omega_1\omega_2$$

$$q_2 = \omega_1'\,\omega_2' =$$

$$= (1 - \omega_1)\,(1 - \omega_2) = 1 - \omega_1 - \omega_2 + \omega_1\omega_2$$

$$I(A',B) = -\,q_1 \log q_1 - q_2 \log q_2$$

$$= -\,(\omega_1 + \omega_2 - \omega_1\omega_2) \log (\omega_1 + \omega_2 - \omega_1\omega_2)$$

$$-\,(1 - \omega_1)\,(1 - \omega_2) \log (1 - \omega_1)\,(1 - \omega_2)$$

c) $I_{max} \equiv C = \log m$ (قناة عديمة الضوضاء)

[ملاحظة: لا داعي لاشتقاق I لإيجاد النهاية العظمى]

$$= \log 2 = 1$$

$$I = \max \text{ if } q_1 = q_2$$

$$\omega_1 + \omega_2 - \omega_1\omega_2 = 1 - \omega_1 - \omega_2 + \omega_1\omega_2$$

$$\Rightarrow 2(\omega_1 + \omega_2 - \omega_1\omega_2) = 1$$

$$\Rightarrow \omega_1 + \omega_2 - \omega_1\omega_2 = \tfrac{1}{2}$$

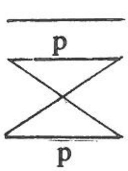
$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \omega_1 = \alpha \\ \omega_2 = \dfrac{\frac{1}{2} - \alpha}{1 - \alpha} \; ; \; (0 \leqslant \alpha < \tfrac{1}{2}) \end{array}}$$

$C = 1$ bit/symbol

2-24.i)

يمكن أن نعتبر القناة قناتين على التوازي :

1)
2)



الأولى مثالية : $C_1 = \text{Log}\, 1 = 0$

والثانية BSC : $C_2 = 1 - H(p)$

$$C = \log (2^0 + 2^{1 - H(p)})$$

$$= \log\left(1 + 2^{1-H(p)}\right)$$

$$P_{opt} : \quad p_1 = 2^{C_1 - C} = 2^{-\log\left(1+2^{1-H(p)}\right)} = \frac{1}{1+2^{1-H(p)}}$$

$$p_2 = 1 - p_1 = \frac{2^{1-H(p)}}{1+2^{1-H(p)}}$$

بالنسبة للرسم المبين يكون التوزيع الأمثل هو:

$$p_{opt} = \left\{p_1 , \frac{p_2}{2} , \frac{p_2}{2}\right\}$$

أما بالنسبة للرسم المعطى في السؤال فالتوزيع الأمثل هو:

$$p_{opt} = \left\{\frac{p_2}{2} , p_1 , \frac{p_2}{2}\right\}$$

b) $\text{BEC} \Rightarrow C = \alpha = 1 - p$

$$P_{opt} = \left\{\frac{1}{2} , \frac{1}{2}\right\}$$

c) $\text{GBC}\begin{pmatrix} .5 & .5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha = .5$, $\beta = 0$

$C = .3219$

$P_{opt} = \{p , 1-p\} = \{0.4 , 0.6\}$

ii) $\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow q_1 = \frac{1}{4} , q_2 = \frac{3}{4} \Rightarrow I = .3113$

$\eta = \frac{.3113}{.3219} = 96.7\%$; $R = .3219 - .3113 = .0106$

2-25.i) $C_{uniform} = \log 3 + .5 \log .5 + .3 \log .3 + .2 \log .2$

$= 0.0994$

$\{q_j\} = \{.36 , .3 , .34\}$

$$I_{uniform} = 0.0954$$

$$\eta = .0954/.0994 = 95.98\%$$

(ii

تختزل القناة في خطوتين الى قناة أبسط:

العمودان الرابع والخامس متناسبان طردياً (متساويان) فيمكن جمعهما في عمود واحد، وكذلك العمودان الأول والثالث متناسبان طردياً (الأول = ٤ × الثالث) فيمكن جمعهما.

القناة المختزلة المكافئة هي القناة المعطاة في الجزء (i) نفسها وبالتالي:

$$\eta = \eta_{(i)} = 95.98\%$$

2-26.a)

بتطبيق طريقة «مروجا» على المصفوفة المربعة، نحصل على القيم:

$$t_1 = t_3 = -1 \ , \ t_2 = \frac{p-h}{1-p}$$

وبتعويض هذه القيم نحصل على العلاقة المطلوبة.

b) $p = 0.5 \Rightarrow$ uniform ch. $\Rightarrow P_{opt} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}$.

c) $P(Y) = \{0.4, 0.2, 0.4\}$

$I_{uniform} = .522$

$C_{uniform} = .5849 \Rightarrow \eta = 89.25\%$

2-27.i.a)

٣ قنوات على التوازي (مثالية n=1، وثنائية متماثلة α=0.5، ومثالية n=1):

$$C_1 = C_3 = \log 1 = 0$$

$$C_2 = 1 - H(0.5) = 0$$

$$C \equiv C_{parallel} = \log(2^0 + 2^0 + 2^0) = \log 3 = 1.5849$$

(b

القناة عبارة عن قناتين منتظمتين على التوازي

$$C_1 = \log 3 + 2 \times .5 \log .5 = 0.5849$$

$$C_2 = \log 4 + 2(.2\log .2 + .3\log .3) = 0.0290$$

$$C = \log(2^{.5849} + 2^{.0290}) = 1.3336$$

ii.a) $p_i = 2^{C_i - C},\ i = 1,2,3$

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0 \Rightarrow p_i = 2^{-C} = 2^{-\log 3} = \frac{1}{3};\ i = 1,2,3$$

وبما أن القناة الثانية ثنائية متماثلة فتبلغ سعتها عند تساوي احتمالي عنصريها

$$\Rightarrow P_{opt} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right\}$$

b) $p_i = 2^{C_i - C},\ i = 1, 2$

$p_1 = 0.5951396 \quad , \quad p_2 = 0.4048604$

وبما أن كلاً من القناتين قناة منتظمة فتبلغ سعتها عند تساوي احتمالات مداخلها.

$$\Rightarrow P_{opt} = \left\{\frac{p_1}{3}, \frac{p_1}{3}, \frac{p_1}{3}, \frac{p_2}{2}, \frac{p_2}{2}\right\}$$

$$= \{.1984, .1984, .1984, .2024, .2024\}$$

2-28.a) $C_I = C_{BEC} = 1 - \varepsilon$

$$Q_{II} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ .5 & .5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ P_{max} = \begin{pmatrix} .5 \\ 0 \\ .5 \end{pmatrix} \Rightarrow \pi = \begin{pmatrix} .5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & .5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$P(Y) = \{.5, .5\} \Rightarrow$

$C_{II} = I_{max} = H(Y) - H(Y|X) = \log 2 + 0 = 1$

$C_{III} = C_{BSC} = 1 - H(0.2) = 0.2781$

b) $Q = Q_I.Q_{II}.Q_{III} = \begin{pmatrix} 0.8 - 0.3\varepsilon & 0.2 + 0.3\varepsilon \\ 0.2 + 0.3\varepsilon & 0.8 - 0.3\varepsilon \end{pmatrix}$

$$C_{cascade} = C_{BSC} = 1 - H(0.2 + 0.3\varepsilon)$$

c) 1) $\eta_{II} = I(Z, W)/C_{II}$

$$Q_I = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$P(Z) = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}$$

$$Q_{II} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ .5 & .5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \pi_{II} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow P(W) = \{.5, .5\}$$

$$I(Z, W) = H(W) - H(W|Z) = 1 + 2 \times \frac{1}{6} \log \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

$$\eta_{II} = 66.667\%$$

2) $Q \equiv Q_{cascade} = \begin{pmatrix} .7 & .3 \\ .3 & .7 \end{pmatrix}$

ونظراً لأن القناة المركبة قناة ثنائية متماثلة فهي تبلغ سعتها عندما يكون احتمالاً عنصري المصدر متساويين كما هو الحال هنا، أي أن I تصل الى النهاية العظمى C، وبالتالي $\eta = 100\%$.

3) $R = C - I = 0$

2-29.a) $p \equiv P(a|B) = P(b|A) = \frac{2}{20} = 0.1$

$$q \equiv P(c|A) = P(c|B) = \frac{1}{20} = 0.05$$

$$Q \equiv \begin{array}{c|ccc} & a & c & b \\ \hline A & 1-p-q & q & p \\ B & p & q & 1-p-q \end{array} = \begin{pmatrix} .85 & .05 & .1 \\ .1 & .05 & .85 \end{pmatrix}$$

b) i) $\pi = \begin{pmatrix} .85\alpha & .05\alpha & .1\alpha \\ .1(1-\alpha) & .05(1-\alpha) & .85(1-\alpha) \end{pmatrix}$

$$P(Y) = \{.1 + .75\alpha,\ .05,\ .85 - .75\alpha\}$$

(ثابت بالنسبة لـ α)

$$I(X, Y) = H(Y) - H(Y|X) = \dots\dots\dots$$

$$= -(.1 + .75\alpha)\log(.1 + .75\alpha) - .85 - .75\alpha)\log(.85 - .75\alpha)$$

$$+ .85\log .85 + .1\log .1$$

ii) من تماثل شكل القناة واضح أن التوزيع المنتظم عند المدخل (أي $\alpha = 0.5$) هو التوزيع الاحتمالي الأمثل، أي الذي يجعل I تصل الى قيمتها العظمى، ويمكن إثبات ذلك أيضاً بالتفاضل كما يلي:

$$\frac{dI}{d\alpha} = 0 \Rightarrow$$

$$0 = (.1 + .75\alpha).\frac{1}{.1 + .75\alpha} \times .75 + [\log(.1 + .75\alpha)] \times .75$$

$$+(.85 - .75\alpha).\frac{1}{.85 - .75\alpha}(-.75) + [\log(.85 - .75\alpha)](-.75)$$

$$\Rightarrow \log\frac{.1 + .75\alpha}{.85 - .75\alpha} = 0 \Rightarrow .1 + .75\alpha = .85 - .75 \Rightarrow$$

$$\alpha = 0.5$$

$$\Rightarrow I_{max} = I|_{\alpha=0.5} = 0.4888 \quad \text{bits|symbol}$$

c) $C \equiv I_{max} = 0.4888$ bits|symbol

$I|_{\alpha=0.4} = 0.4717$ bits|symbol

$\eta = .4717/.4888 = 96.5\%$

2-30

* المعلومات المتبادلة خلال القناة الثنائية المتماثلة تبلغ قيمتها العظمى (أي سعة القناة) حينما يكون احتمالاً إرسال عنصري المصدر عبر القناة متساويين، ولذلك فإن:

$$I(A, B) = C = 1 - H(p)$$

* وبالنسبة للقناة المكافئة للقناتين الأولى والثانية على التوالي فإن مصفوفتها هي :

$$Q_{AC} = \begin{pmatrix} p' & p \\ p & p' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p' & p \\ p & p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p'^2 + p^2 & 2pp' \\ 2pp' & p^2 + p'^2 \end{pmatrix}$$

أي أن هذه القناة هي قناة ثنائية متماثلة احتمال الخطأ فيهـا هو $2pp'$ ولنفس السبب المذكور سابقاً تكون المعلومات المتبادلة خلالها هي سعتها، أي أن :

$$I(A,C) = 1 - H(2pp')$$

وبالنسبة للقناة المكافئة للقنوات الثلاث على التوالي فإن مصفوفتها هي :

$$Q_{AD} = Q_{AC} \,.\, Q_{CD} = \begin{pmatrix} p'^2 + p^2 & 2pp' \\ 2pp' & p^2 + p'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p' & p \\ p & p' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} p'(p'^2 + p^2) + 2p^2p' & p(p'^2 + p^2) + 2pp'^2 \\ 2pp'^2 + p(p^2 + p'^2) & 2p^2p' + p'(p^2 + p'^2) \end{pmatrix}$$

أي أنها قناة ثنائية متماثلة احتمال الخطأ فيها

$$p(p'^2 + p^2) + 2pp'^2 \;=\; 3pp'^2 + p^3$$

ولنفس السبب المذكور سابقاً، تكون المعلومات المتبادلة خلالها هي سعتها، أي أن :

$$I(A,D) = 1 - H(3pp'^2 + p^3)$$

b) $I(A,B) = 1 - H(0.2) = .2781$ bits/symbol

وتتفق هذه القيمة مع قيمة I التي نحصل عليها من المنحنى (n=1) والمقابلة لاحتمال الخطأ $p = 0.2$

$$I(A,C) \;=\; 1 - H(2 \times 0.2 \times 0.8) \;=\; 1 - H(.32) \;=\; 0.0956$$

وتتفق هذه القيمة مع قيمة I التي نحصل عليها من المنحنى (n=2) والمقـابلة لاحتمال الخطأ $p=0.2$.

من المعلوم أن التوزيع الاحتمالي المنتظم عند مدخل القناة الثنائية المتماثلة c) يؤدي الى توزيع احتمالي منتظم كذلك عند مخرجها، وبالتالي عند مدخل

القناة التالية لها ـ أي المتصلة معها على التوالي ـ وبالتـالي تبلغ المعلومات المتبادلة خلال هذه القناة التالية قيمتها العظمى أي سعة القناة، ولذلك فإن :

$$I(B,C) = 1 - H(p)$$
$$I(B,D) = 1 - H(2pp')$$
$$I(C,D) = 1 - H(p)$$

d) $$C_{equiv} = I(A,D) = 1 - H(3pp'^{2} + p^{3})$$

e) نظراً لأن المصدر يرسل عنصريه باحتمالين متساويين (توزيع منتظم) فإن المعلومات المتبادلة خلال القناة الثنائيـة المتماثلة المتصلة بـه (سواء كـانت متصلة به مباشرة، أو مكافئة لعدة قنوات متتالية أولاها متصلة به) تبلغ سعة القناة، وبالتالي تكون كفاءة الإرسال ١٠٠٪، أي أن

1) $\eta = 100\%$ 2) $\eta = 100\%$

2-31.a) $$\begin{pmatrix} X \\ p(X) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega & \overline{\omega} \end{pmatrix}, \quad Q \equiv \begin{pmatrix} \bar{p} & p \\ p & \bar{p} \end{pmatrix}, \quad \bar{p} = 1 - p$$

$$I(A,B) = H(B) - H(B|A)$$

$$\pi = \begin{pmatrix} \omega\bar{p} & \omega p \\ \overline{\omega}p & \overline{\omega}\bar{p} \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} q_1 = \omega\bar{p} + \overline{\omega}p \\ q_2 = \omega p + \overline{\omega}\bar{p} \end{array}$$

$$H(B) = -q_1 \log q_1 - q_2 \log q_2 = H(\omega p + \overline{\omega}\bar{p})$$

$$\begin{aligned} H(B|A) &= -\omega\bar{p}\log\bar{p} - \omega p\log p - \overline{\omega}p\log p - \overline{\omega}\bar{p}\log\bar{p} \\ &= (-p\log p)(\omega + \overline{\omega}) - (\bar{p}\log\bar{p})(\omega + \overline{\omega}) \\ &= -p\log p - \bar{p}\log\bar{p} = H(p) \end{aligned}$$

$$\therefore I(A,B) = H(\omega p + \overline{\omega}\bar{p}) - H(p) \ldots\ldots(*)$$

b) $$C = \max_{\{\omega,\overline{\omega}\}} I(A,B) = \left[\max_{\{\omega,\overline{\omega}\}} H(\omega p + \overline{\omega}\bar{p})\right] - H(p)$$

$$= 1 - H(p)$$

c) نظراً لأن المقدار $(\omega p + \bar{\omega}\bar{p})$ دائماً محصور بين $\bar{p}, p$ فيتبين لنا من شكل منحنى دالة الانتروبيا المعطى أن $H(\omega p + \bar{\omega}\bar{p}) \geqslant H(p)$ دائماً، وبذلك - من العلاقة (*) - فإن $I(A,B)$ تكون دائماً كمية غير سالبة.

d) 1) $C = 1 - H(0.1) = 0.531$ bits|binit

وهذه القيمة تتفق مع القيمة $C(0.1)$ التي نحصل عليها من المنحنى

2) i) $I\,|_{p=.1,\omega=.3} = H(.3 \times .1 + .7 \times .9) - H(.1) = .4558$

ii) $I\,|_{p=.1,\omega=.5} = H(.5 \times .1 + .5 \times .9) - H(.1) = .531$

3) حسب مقياس الرسم المعطى نجد أن قيمة I عندما $\omega = .3$ هي :

$$I\,|_{\omega=.3} = \frac{2.3}{2.7} \times [1 - H(p)] \Rightarrow$$

$$I\,|_{\omega=.3,p=.1} = \frac{2.3}{2.7} \times [1 - H(0.1)] = 0.452$$

وهي قريبة من القيمة المحسوبة سابقاً (في الجزء 2-i).

4) $$\eta\,|_{\omega=.3,p=.1} = \frac{.4558}{.531} = 85.838\%$$

أجوبة تمرينات
الفصل الثالث

أجوبة تمرينات رقم ٣

3 — 1.a) u.d.واضحة : C_3, C_4, C_5, C_6.

b) p.p.لحظية : C_3, C_4, C_5.

c) $L_3 = 2\frac{1}{8}$, $L_4 = 3$, $L_5 = 2$, $L_6 = 2\frac{1}{8}$

d) $H(x) = 2 \Rightarrow$

C_5 تعطي أقل متوسط طول ممكن لكلمة الشفرة وذلك لأن $L \geqslant H(x)$

e) $C_1 = 10110 \rightarrow x_2 x_3$ or $x_5 x_1$

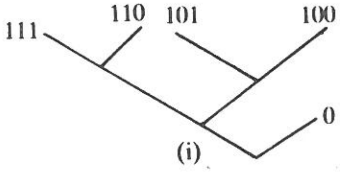
$C_2 = 11011 \rightarrow x_1 x_1 x_2$ or $x_6 x_1 x_1$

3 — 2

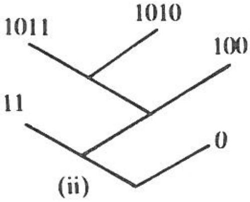
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	H(X)	L	η
لحظية (S-F):	00	01	10	110	111	2.123	2.25	94.4%
مثلي (H):	1	000	001	010	011	2.123	2.18	97.4%

3 — 3

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
(i)	0	100	101	110	111
(ii)	0	11	100	1010	1011



(i)



(ii)

3 — 4 $L_{min} = 2.48$ (من طريقة صياغة الشفرة المثلى)

$H(X) = 2.42$ $L_{min} > H(X)$ $(\eta = 97.58\%)$

3 — 5

		m_1	m_2	m_3	m_4	m_5
ثنائية	binary:	00	01	100	101	110
ثلاثية	ternary:	0	10	11	20	21

	m_6	H(M)	L	η
ثنائية	111	2.3852	2.458	97.03%
ثلاثية	22	2.3852	1.625	92.61%

3 — 6

المصدر الأول :

Binary: { 00, 10, 010, 011, 110, 111 } , L = 2.5

Ternary: { 1, 2, 01, 02, 000, 001 } , L = 1.7

or: { 0 10, 11, 12, 20, 21 } شفرة أخرى

المصدر الثاني :

Binary: { 00, 01, 100, 101, 110, 1110, 1111 } , L = 2.55

Ternary: { 1, 2, 01, 02, 000, 001, 002 } , L = 1.65

(ملاحظة: الشفرة ليست وحيدة unique ، ولكن متوسط طول كلمة الشفرة لا يختلف).

3 — 7 i) $4D^{-2} + 5\,D^{-4} \leq 1 \Rightarrow D \geq \sqrt{5} \Rightarrow D_{min} = 3.$

ii) a) $\sum_i D^{-li} = 1 \Rightarrow$ نعم b) $\sum_i D^{-li} = \frac{33}{32} > 1 \Rightarrow$ لا

3 — 8.i) $C = \{ 1, 00, 01\}$, $L = 1\frac{2}{3}$, $\eta = 95\%$

ii) $C = \{ 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111, 0000, 0001\}$,

$L = 3.222$, $\eta = 0.984$

3 — 9 (optimal H code)أكبر كفاءة شفرة تعني أن تكون الشفرة مثلى

$L = 2.2$, $H(X) = 2.1855$, $\eta = 99.34\%$

$C = \{ 00, 01, 110, 10, 111\}$

لاحظ أن الرسائل المعطاة ليست مرتبة تبعاً لاحتمالاتها.

3 — 10.a) S-F: $\{1100, 1101, 100, 00, 1110, 01, 101, 1111\}$

H: $\{0010, 0011, 010, 10, 0000, 11, 011, 0001\}$

b) $L_{S\text{-}F} = 2\frac{3}{4} = H(X) = L_H$

$\eta_{S\text{-}F} = 100\% = \eta_H$

c) الشفرتان اللتان حصلنا عليهما في هذا الحل مختلفتان اختلافاً شكلياً فقط لأن أطوال الكلمات المتقابلة متساوية (نفس مجموعة الأطوال).

3 — 11 $\log D = \log 2 = 1$

$$P_i = \frac{1}{2^{l_i}} \Rightarrow l_i = -\log p_i$$

$$L = \Sigma p_i l_i = -\Sigma p_i \log p_i = H(X)$$

$$\eta = \frac{H(X)}{L \log D} = \frac{H(X)}{H(X).1} = 1 = 100\%$$

3 — 12 a) $\eta = \dfrac{H(X)}{L \log D}$, $L = \Sigma p_i l_i$

i) $D = 4$, $L = 1 \Rightarrow L \log D = 2$

ii) $D = 2$, $L = 2 \Rightarrow L \log D = 2$

لا يحدث أي تغيير في الكفاءة [$H(X)$ لها نفس القيمة]

b) S-F : { 0, 10, 110, 111}

$$L_{S\text{-}F} = 1\tfrac{3}{4} \ , \ D = 2$$

$$L \log D = 1\tfrac{3}{4}$$

تزداد الكفاءة بتطبيق شفرة S-F.

3 — 13.a) الثنائية :

{11, 000, 001, 010, 100, 0110, 1010, 1011, 01110, 01111}

$L = 3.12$, $L \text{ Log } D = 3.12$

b) الرباعية :

$$\frac{n-2}{D-1} = \frac{10-2}{4-1} = \frac{8}{3} \Rightarrow R_{D-1}\,(n-2) = 2 \Rightarrow$$

$$2 + R_{D-1}\,(n-2) = 4$$

الشفرة : { 1, 2, 3, 01, 02, 03, 000, 001, 002, 003}

$L = 1.65$, $L \log D = 3.3 > 3.12$

كفاءة الشفرة الثنائية أكبر ($H(X)$ لا تتغير).

3 — 14 a) الثنائية :

C = { 1, 01, 0010, 0011, 00010, 00011, 00000, 00001}

$L = 2.6$, $H(X) = 2.5219$, $\eta = 96.996\%$

b) الثلاثية

$$2 + R_{D-1}\,(n-2) = 2 + R_2\,(6) = 2$$

$$C = \{0, 2, 11, 12, 101, 102, 1000, 1001\}$$

$$L = 1.7 \quad , \eta = \frac{2.5219}{1.7 * 1.5850} = 93.6\%$$

3 — 15 a) $2^{\ell} \geq n \ , \ n = 28 \Rightarrow \ell = 5$

b) $2^{\ell} \geq n \ , \ n = 10 \Rightarrow \ell = 4$

c) $\{000, 001, 010, 0110, 0111, 100, 101, 110, 1110, 1111\}$

d) الكلمة التي طولها ٤ تبقى كما هي، والكلمة التي طولها ٣ يضاف إليها أي من الرمزين 0 أو 1 (من على اليمين) فتصبح الشفرة هكذا:

$\{0000, 0010, 0100, 0110, 0111, 1000, 1010, 1100, 1110, 1111\}$

3 — 16.a) $S_1: 2 + R_{D-1}(n-2) = 2 + R_2(4) = 2$

$C_1 = \{1, 2, 000, 001, 01, 02\}$

or $C_1 = \{1, 00, 20, 21, 01, 02\}$ حل آخر

$S_2 = 2 + R_{D-1}(n-2) = 2 + R_2(5) = 3$

$C_2 = \{1, 2, 02, 001, 002, 000, 01\}$

b) $C_1 = \{00, 01, 11, 12, 02, 10\}$

$C_2 = \{00, 01, 10, 120, 121, 11, 02\}$

حتى يكون الحرف الأول في كل كلمة شفرة 0 أو 1 ويكون الطول المتوسط أقل ما يمكن، نطبق طريقة هوفمان للشفرة٣الثلاثية ولكن على أن ننتهي بتجميع عنصرين فقط (يأخذ أحدهما 0 والآخر 1). لذلك إذا كان عدد العناصر زوجياً (كما في المصدر الأول S_1) نبدأ بتجميع ثلاثة عناصر، وإذا كان العدد فردياً (كما في المصدر الثاني S_2) نبدأ بتجميع عنصرين فقط.

3- 17 الطريقة الأولى

$P(X) = \{0.46, 0.54\}$

$P(Y) = \{0.45, 0.12, 0.43\}$

$C_X = \{1, 0\}$

$C_Y = \{1, 01, 00\}$

xy		c	ℓ	p	$p\ell$
x_1y_1	:	11	2	0.4	0.8
x_1y_2	:	101	3	0.03	0.09
x_1y_3	:	100	3	0.03	0.09
x_2y_1	:	01	2	0.05	0.1
x_2y_2	:	001	3	0.09	0.27
x_2y_3	:	000	3	0.4	1.2

$$L_1 = \Sigma\, p\, \ell = 2.55$$

الطريقة الثانية:

xy	p	c		$p\ell$
x_1y_1	0.4	1	1	0.4
x_2y_3	0.4	00	2	0.8
x_2y_2	0.09	011	3	0.27
x_2y_1	0.05	0101	4	0.2
x_1y_2	0.03	01000	5	0.15
x_1y_3	0.03	01001	5	0.15

$$L_2 = \Sigma\, p\, \ell = 1.97$$

$$\eta = \frac{H(X,Y)}{L \log D} \;\alpha\; \frac{1}{L}$$

$$L_2 < L_1 \Rightarrow \eta_2 > \eta_1$$

أي أن كفاءة الطريقة الثانية أكبر.

(ملاحظة: $H(X,Y) := 1.8899$, $\eta_1 = 74.114\ \%$, $\eta_2 = 95.935$)

3- 18. a) $S_1 = \{1\} \Rightarrow W_1$: u.d. واضحة

$S_2 = \{1, 0\} \Rightarrow W_2$: not u.d. غير واضحة

كلمة شفرة

$S_3 = \{1, 01\} \Rightarrow W_3$: not u.d. غير واضحة

$S_4 = \{0\} \Rightarrow W_4$: u.d. واضحة

b) W_1 : not inst.

الشفرة W_1 غير لحظية لأن كلمة الشفرة 0 سابقة (prefix) لكلمة الشفرة 01.

W_2: $010 \rightarrow x_2x_1$ or x_1x_3

W_3: $001 \rightarrow x_3$ or x_1x_2

W_4 = not inst

الشفرة W_4 غير لحظية لأن الكلمة 11 سابقة للكلمة 110

3- 19. 1) Uniquely decodable:

$S_I = \{d, abd, ba, ce, ac, ab, c, cd, eac, eab\}$

نظراً لأنه لم تظهر أي كلمة شفرة في المجموعة S_I، فالشفرة I (المعطاة أولاً) واضحة u.d.

$S_{II} = \{bb, b, ba, \ldots\}$

كلمة شفرة

الشفرة II (المعطاة ثانياً) غير واضحة (not u.d.)

أمثلة:

$$\text{babbba} \begin{cases} x_5x_2 \\ x_2x_3 \end{cases} ; \qquad \text{babba} \begin{cases} x_2x_4 \\ x_5x_1 \end{cases}$$

$$\text{bbaba} \begin{cases} x_4x_2 \\ x_6x_1 \end{cases} ; \qquad \text{bbabbba} \begin{cases} x_4x_3 \\ x_6x_4 \end{cases}$$

2) Instantaneous:

الشفرة I غير لحظية لأن الكلمة x_2 امتداد للكلمة x_1 .

الشفرة II غير لحظية لأنها غير واضحة (not u.d.) وكذلك فإن الكلمة x_5 امتداد للكلمة x_2 .

3- 20. a) $H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i = -\sum_i 3^{-\ell_i} \log 3^{-\ell_i}$

$$= \log 3 \sum_i \ell_i \, 3^{-\ell_i}$$

$$L = \sum_i p_i \, \ell_i = \sum_i \ell_i \, 3^{-\ell_i}$$

$$\eta = \frac{H(X)}{L \log 3} = 1 = 100\%$$

b)

x_i	:	x_1	x_4	x_2	x_5	x_3	x_6	x_7
p_i	:	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$
c_i	:	0	1	20	21	220	221	222
ℓ_i	:	1	1	2	2	3	3	3

كلمات الشفرة تحقق شروط الجزء الأول من السؤال [أي أن: طول كلمة الشفرة c_i المقابلة للرسالة x_i يساوي ℓ_i، واحتمال الرسالة x_i وهو p_i

يساوي $\frac{1}{3^{\ell_i}}$ وذلك لجميع قيم i] ، ولذلك فإن كفاءة هذه الشفرة تساوي ١٠٠٪.

3 - 21. a) $C_{S-F} = \{01, 10, 110, 111, 00\}$

$C_H = \{10, 11, 010, 011, 00\}$

b) الشفرة A واضحة ولحظية (ليست هناك كلمة هي جزء من كلمة أخرى)

c) $\eta = \frac{H(X)}{L \log D} \Rightarrow 1 = \frac{H(x)}{L_{min} \log 2} \Rightarrow$

$L_{min} = H(X) = 2.2709$

d) $L_{S-F} = 2.3 = L_H, \; L_A = 2.55$

لا تؤدي أي من الشفرات المعطاة إلى الحصول على القيمة الصغرى L_{min}

e) $T_{S-F} = 0.2 \times 4 + 0.2 \times 4 + 0.15 \times 7 + 0.15 \times 9 +$
$0.3 \times 2 = 4.60$ seconds

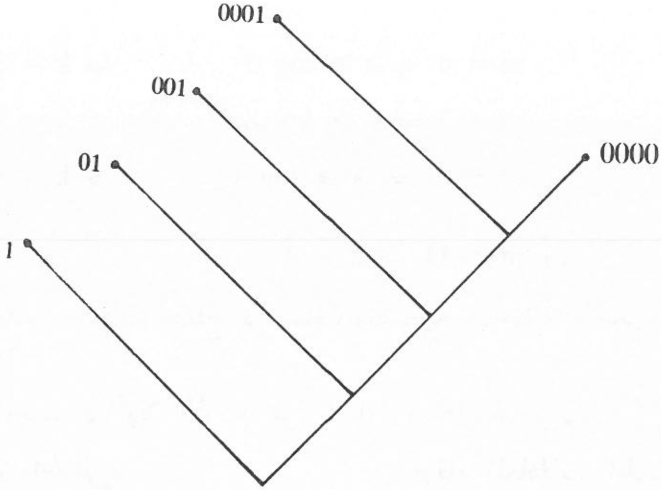
$T_H = 0.2 \times 4 + 0.2 \times 6 + 0.15 \times 5 + 0.15 \times 7 + 0.3 \times 2$
$= 4.40$ seconds

$T_A = 0.2 \times 4 + 0.2 \times 4 + 0.15 \times 5 + 0.15 \times 6 + 0.3 \times 3$
$= 4.15$ seconds

$\Rightarrow T_A < T_H < T_{S-F} \Rightarrow$

الشفرة A تستغرق أقل وقت في عملية الإرسال.

f)



شجرة الشفرة الثنائية للشفرة A

3 - 22 a) انظر مثلاً الشكل المرسوم في المسألة رقم (١) في التمرينات العامة على نظرية المعلومات.

b) من فوائد الشفرات: سهولة تخزين المعلومات وإرسالها، وزيادة كفاءة التخزين والإرسال، أحياناً داعي السرية كالأغراض الحربية، اكتشاف الأخطاء نتيجة التداخل والضوضاء وتصحيحها.

c) من طرق اكتشاف الأخطاء وتصحيحها:

طريقة هامنج (المعادلات)

طريقة المسافات

طريقة إضافة رموز التحقق من العدد الزوجي أو الفردي لرقم معين.

d) $2^k \geqslant m + 1 \quad \Rightarrow \quad k \geqslant \log (m + 1)$

$m = 4 \Rightarrow k \geqslant \log 5 \quad \Rightarrow k = 3$

$m = 7 \Rightarrow k \geqslant \log 8 \quad \Rightarrow k = 3$

$m = 11 \Rightarrow k \geqslant \log 12 \quad \Rightarrow k = 4$

e) $m = 11 \Rightarrow k = 4$

نعم ! هذه المعادلات تصلح لاكتشاف وتصحيح الأخطاء الأحادية كما يلي:

نعطي المعادلات أولاً الأرقام من 1 إلى 4 على الترتيب.

رقم الرمز الخاطىء	أرقام المعادلات الخاطئة
12	1
13	2
14	3
15	4
6	1, 2
7	1, 3
8	1, 4
9	2, 3
10	2, 4
11	3, 4
2	1, 2, 3
3	1, 2, 4
4	1, 3, 4
5	2, 3, 4
1	1, 2, 3, 4

وإذا كانت المعادلات كلها صحيحة فلا يوجد أي خطأ.

الرمز الخاطىء	المعادلات الخاطئة	3 - 23 i)
u_4	E_1	
u_5	E_2	
u_6	E_3	
u_1	$E_1,\ E_2$	
u_2	$E_1,\ E_3$	
u_3	$E_2,\ E_3$	

وإذا كانت المعادلات كلها صحيحة فلا يوجد أي خطأ.

ii)

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0
1	0	1	1	0	1

iii) 010110 :الكلمة المستقبلة

a) $\left.\begin{array}{ll} E_1 & \checkmark \\ E_2 & \times \\ E_3 & \times \end{array}\right\}$ $\Rightarrow$ الرمز u_3 خاطىء $\Rightarrow$

الطقس: ممطر $\Rightarrow$ الكلمة المرسلة (الصحيحة): 011110 $\Rightarrow$

b) بالرجوع إلى الجدول السابق في الجزء ii) نجد أن المسافة بين

الكلمة المستقبلة والكلمة (الرسالة) الرابعة في الجدول تساوي ١، بينما المسافة بين الكلمة المستقبلة وأي رسالة أخرى في الجدول أكبر من ١، ولذلك فنعتبر أن الرسالة الصحيحة هي الرسالة الرابعة 011110، وبالتالي فإن الطقس: ممطر.

3 - 24.I من الجزء ب) من النظرية نستنتج أنه من الممكن أن نكوّن شفرة لحظية ثنائية متوسط طول الكلمة فيها L بحيث أن:

$$L < \frac{H(x)}{\log 2} + 1 = H(x) + 1$$

وحيث أن أي شفرة لحظية هي شفرة واضحة (u.d.)

فنستنتج من الجزء أ) من النظرية أن أي شفرة لحظية ثنائية متوسط طول الكلمة فيها L تحقق المتباينة:

$$L \geqslant \frac{H(X)}{\log 2} = H(X)$$

بجمع النتيجتين السابقتين نرى أنه يمكن أن نكوّن شفرة ثنائية لحظية بحيث أن متوسط طول الكلمة L يحقق المتباينتين:

$$H(X) \leqslant L < H(X) + 1$$

II. i)

x_i	x_1	x_2	x_4	x_5	x_3	x_6
p_i	0.34	0.30	0.12	0.10	0.08	0.06
ℓ_i	7	8	8	9	11	12

واضح أن كل هذه القيم تحقق الشرط

$$p_i \geqslant p_j \quad \Rightarrow \quad \ell_i \leqslant \ell_j \qquad \forall_{i,j}$$

ii) $X = \{ x_1, \; x_2 , \; x_3 , \; x_4 , \; x_5 , \; x_6 \}$

$C = \{ \cdot\cdot, \; \cdot - , \; - - \cdot, \; - \cdot\cdot, \; - \cdot - , \; - - - \}$

$L = 2.36 \; , \; H(X) = 2.2846$

$2.2846 \leq 2.36 < 3.2846$

3 - 25 i) $H(X) = 1.8465, \; \eta_G = \dfrac{1.8465}{2 \times \log 2} = 92.325\%$

ii) $C_{S-F} = \{ 111, \; 110, \; 10, \; 0 \}$

iii) $C_H = \{ 011, \; 010, \; 00, \; 1 \}$ or $\{ 001, \; 000, \; 01, \; 1 \}$

iv) $L_G = 2 \quad , \quad L_H = L_{S-F} = 1.9$

$\eta_H = \eta_{S-F} \; (= 97.184\%) > \eta_G$

v) $G \; : \; p(0) = \frac{1}{2} [0.2 + 0.2 + 0.4] = 0.4 \Rightarrow$

$p(1) = 0.6$

$S - F \; : \; p(0) \; \dfrac{1}{1.9} \; [0.4 + 0.3 + 0.2] = 0.4736842 \Rightarrow$

$p(1) = 0.5263157$

vi) $H(X) + 1 - 2p_{min} = 1.8465 + 1 - 0.2 = 2.6465$

$1.8465 \leq 1.9 \leq 2.6465$

3-26.a) $\eta = \dfrac{H(X)}{L. \log D} \alpha \dfrac{1}{L}$

$$\frac{\eta_{ASCII}}{\eta_H} = \frac{L_H}{L_{ASCII}} = \frac{4.4336}{8} = 0.5542$$

b) 1)

	ء	م	ي	ح	ل	م
ASCII :	01111000	01101000	01100100	01110000	01100111	01101000
Huffman :	01101011	100	1010	101111	010	100

واضح أن الشفرة المتراصة تؤدي إلى ضغط هذا النص من 48 رقم ثنائي إلى 27 رقم ثنائي فقط، أي ضغط النص إلى $\frac{27}{48} = 0.5625$ فقط من حجمه الأصلي.

2) $N_{ASCII} = (6+3+3)\times 8 = 96$ bits

$N_{H} = 17 + (7+4+5) + (5+3+5) = 56$ bits

هـ ل ك ر ي خ

$$\text{Ratio} = \frac{56}{96} = 0.5833$$

3-27.a) بتطبيق طريقة هوفمان على المصدر

$$\begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_8 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \dots & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

نحصل على الشفرة القالبية :

$$\{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$$

لاحظ أن احتمالات عناصر المصدر المعطى تحقق الشرط المذكور وهو أن احتمال أي عنصر يساوي على الأقل ثلثي مجموع جميع احتمالات العناصر التي تليه :

$$.6 \times \frac{2}{3} = .4 \le .4$$

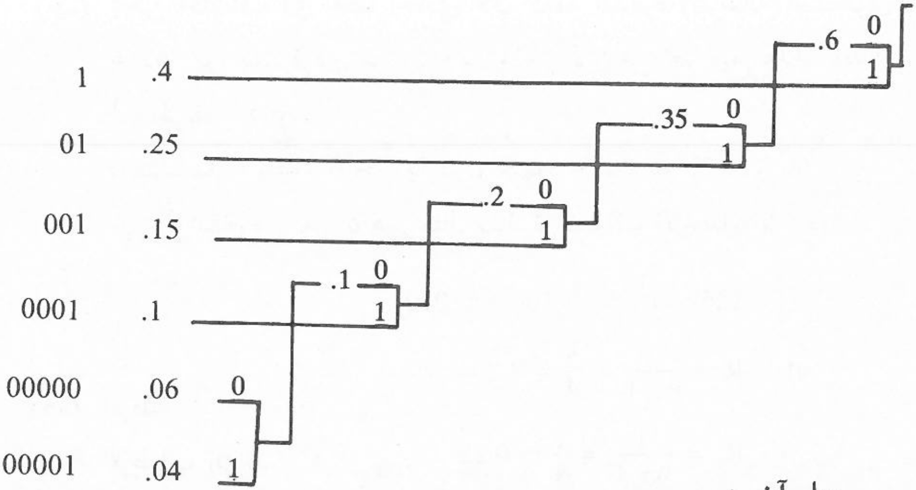
$$.35 \times \frac{2}{3} = .23.. \le .25$$

$$.2 \times \frac{2}{3} = .13.. \le .15$$

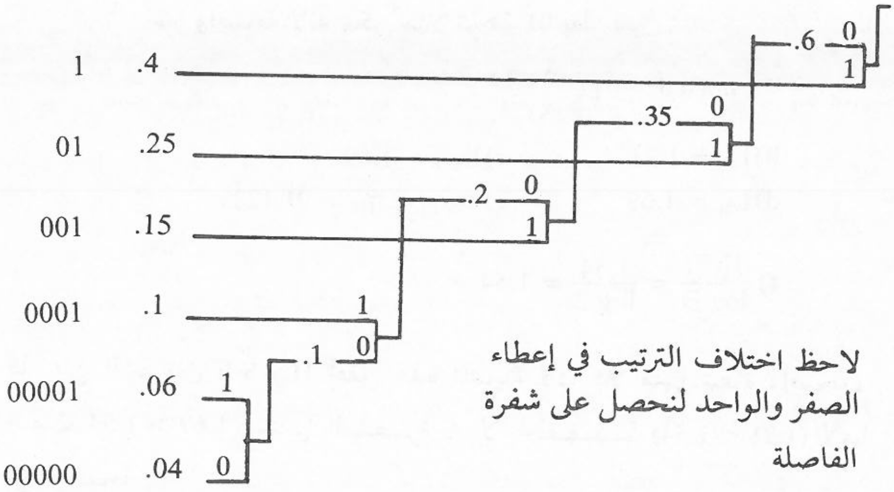
$$.1 \times \frac{2}{3} = .066.. \le .1$$

$$.04 \times \frac{2}{3} = .026.. \leq .06$$

الحصول على شفرة الفاصلة بطريقة هوفمان:



حل آخر:



لاحظ اختلاف الترتيب في إعطاء الصفر والواحد لنحصل على شفرة الفاصلة

3-28.a)

(أ) تستخدم رموز التحقق من النوعية الزوجية، لأن عدد الآحاد في كل كلمة يساوي ٢ (وهو عدد زوجي).

(ب) b) $d_{min} = 2$, $d_{max} = 4$

c)

(جـ) يمكن اكتشاف أي خطأ أحادي لأن كلمة الشفرة (الرسالة) ستحتوي عندئذٍ على عدد فردي من الآحاد، ولكن لا يمكن تصحيح هذا الخطأ.

أو بطريقة أخرى:

[اكتشاف الأخطاء الأحـادية دون تصحيحهـا] ⇐ $[d_{min} = 2]$

أي أن الشفرة ٢ من ٥ هي مثال لشفرة اكتشاف الأخطاء الأحادية

(د) d) 125 : 11000 10100 01010

e) $R = \frac{n}{n-1} = \frac{5}{4} = 1.25$

(هـ) الإطناب

الإطناب الزائد $R_e = \frac{1}{n-1} = \frac{1}{4} = 0.25$

3.29.a)

غير واضحة لأنه يمكن مثلاً ترجمة 01 بطريقتين:

$$\text{not u.d.} \quad 01 \left\langle \begin{array}{l} x_1\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right.$$

b) $L_A = 1.21$ c) $L_{S-F} = 1.69$

d) $L_H = 1.69$ e) $\eta_{S-F} = \eta_H = 91.12\%$

f) $\frac{H(S)}{\log D} = \frac{1.54}{\log 2} = 1.54$

كل من الشفرتين S-F و H تحقق هذه المتباينة لأن كلاً منهما شفرة واضحة، حيث $1.54 < 1.69$ بينمـا الشفـرة A لا تحققهـا $(1.54 < 1.21)$ لأنها غير واضحة

3.30.a)

أ) للمصدر خمسة عناصر ⇐ أقصر شفرة قالبية طولها = ٣، مثل

$$C = \{000, 001, 010, 011, 100\}$$

ب) شانون ـ فانو: b) $S-F : \{00, 01, 10, 110, 111\}$

هوفمان : $H \quad : \{01, 000, 001, 10, 11\}$

(جـ) c) $L_A = 2.6 \ , \ L_B = 2.8 \ , \ L_C = 3$

$L_{S-F} = L_H = 2.4$

$L_{S-F} = L_H < L_A < L_B < L_C$

$$\underset{96.75}{\eta_{S-F} = \eta_H} > \underset{89.3}{\eta_A} > \underset{82.9}{\eta_B} > \underset{77.398}{\eta_C} \qquad \left(\eta\,\alpha\,\frac{1}{L}\right)$$

d) جميع الشفرات الخمس واضحة ولحظية

د) مجموعات أطوال كلمات الشفرة بالنسبة للشفرات الخمس هي :

$\mathcal{L}_{S-F} = \mathcal{L}_H = \{2, 2, 2, 3, 3\} \quad , \quad \mathcal{L}_A = \{1, 3, 3, 3, 3\}$

$\mathcal{L}_B = \{1, 2, 3, 4, 4\} \quad , \quad \mathcal{L}_C = \{3, 3, 3, 3, 3\}$

لذلك فالشفرات A,B,C مختلفة اختلافاً جوهرياً فيما بينها، وكذلك بين أي منها وأي من شفرتي S-F, H. أما شفرتا H و S-F فيمكن أن يكون الاختلاف بينهما شكلياً إذا أسندنا كلمات شفرة ذات نفس الأطوال لنفس عناصر المصدر، وإلا فالاختلاف بينهما أيضاً اختلاف جوهري كما هو الحال في الإسناد المبين سابقاً، حيث كلمة شفرة S_2 مثلاً طولها ٢ في شفرة S-F بينما طولها ٣ في شفرة H.

هـ) لا يمكن اكتشاف الأخطاء الأحادية في الشفرة C، لأن أقل مسافة بين كلمتي شفرة $d_{min} = 1$.

الشفرة D المطلوبة لاكتشاف الأخطاء الأحادية يجب أن تكون فيها $d_{min} \geqslant 2$، مثلاً :

$$D = \{0000, 0011, 1100, 0110, 1111\}$$

3-31.a) $C_H = \{0, 10, 11\}$

$L \equiv L_{min} = L_H + 1.3$

$H(X) = 1.1813$

$H(X) \leq L < H(X) + 1$

$1.1813 \leq 1.3 < 2.1813 \Rightarrow$ المتباينتان متحققتان

b) $X = \{x_1, x_2, x_3\}$
$P(X) = \{.7, .15, .15\}$

$$X^2 = \{x_1x_1, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_1, x_2x_2, x_2x_3, x_3x_1, x_3x_2, x_3x_3\}$$

$$P(X^2) = \{\ .49\ \ .105\ \ .105\ \ .105\ \ .0225\ \ .0225\ \ .105\ \ .0225\ \ .0225\ \}$$

وبتطبيق طريقة هوفمان لهذا المصدر X^2 نحصل على :

$$C_H = \{1, 001, 010, 011, 000110, 000111, 0000, 000100, 000101\}$$

$$L_2 = \sum_{i=1}^{9} p_i l_i = 2.395 \text{ bits/2 symbols}$$

$$\Rightarrow \text{average number of bits per source symbol} = \frac{2.395}{2}$$

$$= 1.1975 \qquad \text{bits|source symbol}$$

أي أن متوسط عدد الأرقام الثنائيـة لكل رمـز من رموز المصـدر X يساوي 1.1975 وهو أصغر من L. أي أن :

$$\frac{L_2}{2} = 1.1975 < 1.3 \equiv L$$

c) $$\eta_X = \frac{H(X)}{L \log D} = \frac{1.1813}{1.3 \times 1} = 90.87\%$$

$$\eta_{X^2} = \frac{H(X^2)}{L_2 \log D} = \frac{2 \times 1.1813}{2.395 \times 1} = 98.65\%$$

$$\eta_{X^2} > \eta_X$$

d)

د) شفرة المصدر X أبسط من شفرة المصدر X^2 وذلك لأن عدد كلمات الشفرة المطلوبة للمصـدر X يساوي $n = 3$ بينـما عدد كلمات الشفـرة المطلوبـة للمصدر X^2 يساوي $n^m = 3^2 = 9$ وعموماً كلما زاد عـدد كلمات الشفرة زادت صعوبة صياغة الشفرة. كذلك فإنه عندما ترسل كلمة شفرة مقابلة لعنصر من عناصر X^2 (أو عموماً X^m) فإن جهاز الاستقبال ينتـظر حتى يستقبل كلمة الشفرة كلها حتى يبدأ بعد ذلك في الترجمة. ولذلك فإن شفرة المصدر X^2 تكون أبطأ في عملية الترجمة وتسبب بعض التأخير.

ملاحظة : L تقع بين $H(X) + 1$ و $H(X)$

بينما $\frac{\dot{L}_2}{2}$ تقع بين $H(X) + \frac{1}{2}$ و $H(X)$

وعموماً $\frac{L_m}{m}$ تقع بين $H(X) + \frac{1}{m}$ و $H(X)$

$$\frac{L_m}{m} \leq L$$

وهكذا يمكن صياغة شفرة للمصدر X^m (لقيم أكبر للرتبة m) ونحصل على قيمة أصغر لمتوسط كلمة الشفرة للرمز الواحد من رموز المصدر. والقيمة المطلقة للحد الأدنى لهذا المتوسط هي $H(X) = 1.1813$. وهكذا فإن صياغة شفرة للمصدر X^m للقيم $m>2$ سوف تؤدي إلى تعقيد أكثر وتأخير أكثر بدون زيادة أو تحسُّن يذكر بالنسبة للكفاءة.

الخلاصة: زيادة الكفاءة بصياغة شفرة للمصدر X^m (حيث m تساوي 2 أو أكثر) يكون على حساب بساطة الشفرة وسرعة فكها، فالمسألة تحتاج إلى نوع من التوفيق والمواءمة بين الكفاءة من ناحية وبساطة الشفرة وسرعة فكها من ناحية أخرى.

هـ) في شفرة المصدر X: $x_1x_2x_1x_1 \rightarrow 0\ 10\ 0\ 0$ (e

في شفرة المصدر X^2: $x_1x_2 | x_1x_1 \rightarrow 001\ \ 1$

3-32.a) شفرة ثلاثية متراصة

$$D = 3 \quad , \quad n = 11$$

$$2 + R_{D-1}(n-2) = 2 + R_2(9) = 2 + 1 = 3$$

لاحظ أن الرمز S_6 احتماله 0.15 ولذلك يأتي في المرتبة الثانية عند ترتيب الرموز تنازلياً.

$$S = \{s_1, s_2, s_3, ..., s_{11}\} \Rightarrow$$

$$C = \{2, 02, 11, 12, 000, \underline{\underline{01}}, 001, 002, 100, 101, 102\}$$

$$L = 2.09 \ , \ H(X) = 3.22744 \ , \ \log D = \log 3 = 1.5849$$

$$\eta = \frac{3.22744}{2.09 \times 1.5849} = 97.43388\%$$

b) $D = 4 \Rightarrow 2 + R_{D-1}(n-2) = 2 + R_3(9) = 2 + 0 = 2$

$C = \{2, 00, 01, 02, 03, \underline{\underline{3}}, 11, 12, 13, 100, 101\}$

$L = 1.70 \quad , \quad \log D = 2$

$$\eta = \frac{3.22744}{1.70 \times 2} = 94.9247\%$$

$\Rightarrow \eta_{tri} > \eta_{quat}$

3-33.a) (i) أ(i) شفرة رباعية

$2 + R_{D-1}(n-2) = 2 + R_3(11) = 4$

$C = \{2, 3, 00, 01, 02, 03, 10, 11, 12, 130, 131, 132, 133\}$

(١) الشفرتان مختلفتان اختلافاً شكلياً.

(٢) $L = 1\frac{9}{16}$ وهي القيمة المذكورة بالجدول نفسها.

(٣) $H(X) = 3\frac{1}{8} \quad , \quad \eta = \frac{25/8}{(25/16) \times 2} = 100\%$

وهي قيمة الكفاءة نفسها التي يعطيها المنحنى.

(ii) (ii) شفرة سداسية $D = 6$

$2 + R_{D-1}(n-2) = 2 + R_5(11) = 3$

$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 00, 01, 02, 03, 05, 040, 041, 042\}$

(١) الشفرتان مختلفتان اختلافاً شكلياً

(٢) $L = \frac{87}{64} = 1.359375$ وهي القيمة المذكورة بالجدول.

$$\eta = \frac{25/8}{(87/64) \times \log 6} = 88.9338\%$$

وهذه القيمة تتفق مع قيمة الكفاءة التي يعطيها المنحنى.

(ب) أولاً: كلما زاد عدد رموز الشفرة D قلّ متوسط طول كلمة الشفرة L (من الجدول)

ثانياً: كلما زاد عدد رموز الشفرة D قلت - على العموم - كفاءة الشفرة η، وإن كان النقصان ليس على وتيرة واحدة أي ليس مضطرداً (monotonic) فهي تقل أولاً (عند D = 3) من ١٠٠٪ (عند D = 2)، ثم تعود للزيادة إلى ١٠٠٪ (عند D = 4)، ثم تبدأ في النقصان مرة أخرى، وأحياناً تزيد زيادة طفيفة كما هو الحال عند D = 10 (من المنحنى).

(جـ) الشفرة الثنائية بلغت كفاءتها ١٠٠٪ لأن احتمالات عناصر المصدر كلها في الصورة.

$$p_i = \frac{1}{2^{l_i}} \quad ; \quad i = 1, 2, ..., 13$$

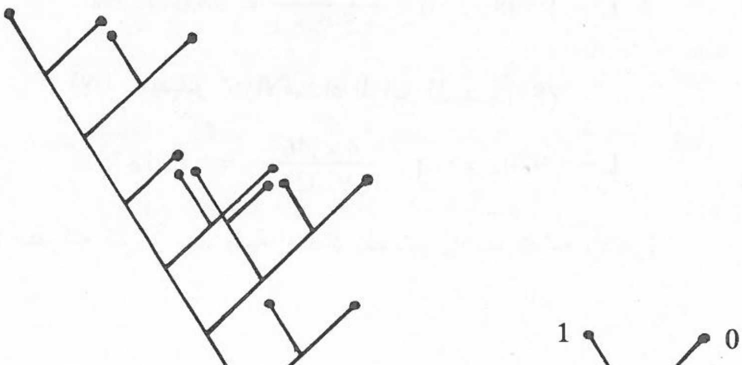
حيث ℓ_i عدد صحيح.

[كذلك بلغت كفاءة الشفرة الرباعية ١٠٠٪ لأن احتمالات عناصر المصدر كلها في الصورة

$$p_i = \frac{1}{4^{l_i}} \quad ; \quad i = 1, 2, ..., 13$$

حيث ℓ_i عدد صحيح]

(د) شجرة الشفرة الثنائية:



3-34.a)

(i) المصدر S

$$C = \{0, 1\} \ , \ L = 1 \ , \ H(S) = H(0.1) = .469$$

$$\eta = \frac{.469}{1 \times 1} = 46.9\%$$

(ii) المصدر S^2 (الامتداد الثاني للمصدر S)

$$S^2 = \{00, 01, 10, 11\}$$
$$P(S^2) = \{.81, .09, .09, .01\}$$

$$C = \{0, 11, 100, 101\}$$

$$L = 1.29 \ , \ \eta = \frac{2 \times .469}{1.29 \times 1} = 72.713\%$$

ملاحظة :

$$H(S^K) = k.H(S)$$

$$H(S^2) = 2.H(S)$$

(iii) المصدر S^3 (الامتداد الثالث للمصدر S)

$$S^3 = \{000, 001, 010, 100, 011, 101, 110, 111\}$$
$$P(S^3) = \{.729, .081, .081, .081, .009, .009, .009, .001\}$$
$$C = \{0, 100, 101, 110, 11100, 11101, 11110, 11111\}$$

لاحظ أننا قد رتبنا عناصر S^3 تنازلياً حسب احتمالاتها.

$$L = 1.598 \ , \ \eta = \frac{3 \times .469}{1.598 \times 1} = 88.04755\%$$

(iv) المصدر S^4(الامتداد الرابع للمصدر S)

$$L = 1.9702 \Rightarrow \eta = \frac{4 \times .469}{1.9702 \times 1} = 95.21875\%$$

نلاحظ أنه كلما زادت رتبة امتداد المصدر زادت كفاءة الشفرة.

(أ) المرحلة الثانية : 3-35

الرموز الوسطية	كلمات شفرة المرحلة الثانية
S_i	ω_i
S_0	0000
S_1	0001
S_2	0010
S_3	0011
S_4	0100
S_5	0101
S_6	0110
S_7	0111
S_8	1

لاحظ أن هذه شفرة لحظية ولذلك فإذا كانت كلمة شفرة S_8 هي الرقم 1 فيجب أن تبدأ جميع الكلمات الأخرى للشفرة بالرقم 0 (كما هو مبين بالجدول السابق) والعكس صحيح، أي إذا كانت كلمة شفرة S_8 هي الرقم 0 فجميع الكلمات الأخرى تبدأ بالرقم 1.

(ب) شفرة المرحلة الأولى واضحة لأن أي كلمة شفرة فيها عبارة عن رمز واحد فقط، وبالتالي فليس هناك احتمال لأي التباس عند فك الشفرة.
وكذلك شفرة المرحلة الثانية واضحة لأن أي كلمة شفرة فيها من الكلمات الثمان الأولى تبدأ بصفر (وطولها ٤ رموز ثنائية)، بينما كلمة الشفرة التاسعة تبدأ بواحد (وطولها رمز ثنائي واحد)، وبالتالي فليس هناك احتمال لأي التباس عند فك الشفرة. أو: الشفرة لحظية لأنه ليس هناك كلمة هي امتداد لكلمة أخرى، وبالتالي فهي واضحة.
وحيث أن شفرة كل من المرحلتين واضحة فتكون الشفرة الكلية واضحة كذلك.

(جـ)، (د):

Source Sequence		P_i	S_i	l_i
1	.1	= .1	S_0	1
0 1	$(.9) \times .1$	= .09	S_1	2
0 0 1	$(.9)^2 \times .1$	= .081	S_2	3
0 0 0 1	$(.9)^3 \times .1$	= .0729	S_3	4
0 0 0 0 1	$(.9)^4 \times .1$	= .06561	S_4	5
0 0 0 0 0 1	$(.9)^5 \times .1$	= .059049	S_5	6
0 0 0 0 0 0 1	$(.9)^6 \times .1$	= .0531441	S_6	7
0 0 0 0 0 0 0 1	$(.9)^7 \times .1$	= .04782969	S_7	8
0 0 0 0 0 0 0 0	$(.9)^8$	= .43046721	S_8	8

$$\sum p_i = 1.00000000$$

احتمالات رموز المصدر S هي الاحتمالات p_i حيث:

$$p_i = P(S_i) \quad ; \quad i = 0, 1, 2, \dots, 8$$

$$L_1 = \Sigma\, p_i l_i$$
$$= 1\times.1+2\times(.9)\times.1+3\times(.9)^2\times.1+4\times(.9)^3\times.1+\dots$$
$$+8\times(.9)^7\times/1+8\times(.9)^8$$
$$=(.1)\times\sum_{i=1}^{8} i(.9)^{i-1}+8\times(.9)^8$$

= 5.6953279 binits from original Source/ intermediate symbol from S

(هـ):

$\mathbf{Seq_i}$	$\mathbf{P_i}$	$\mathbf{S_i}$	ω_i	ℓ'_i
1	.1	S_0	0 0 0 0	4
0 1	.09	S_1	0 0 0 1	4
0 0 1	.081	S_2	0 0 1 0	4
0 0 0 1	.0729	S_3	0 0 1 1	4
0 0 0 0 1	.06561	S_4	0 1 0 0	4
0 0 0 0 0 1	.059049	S_5	0 1 0 1	4
0 0 0 0 0 0 1	.0531441	S_6	0 1 1 0	4
0 0 0 0 0 0 0 1	.04782969	S_7	0 1 1 1	4
0 0 0 0 0 0 0 0	.43046721	S_8	1	1

$L_2 = \Sigma p_i l'_i$

$= 4 \times (1 - .43046721) + 1 \times .43046721$

$= 2.70859837$ encoded binary digits (run length)/ intermediate symbol.

$`R = L_2 / L_1 = 0.475582515$

(و)

أجوبة التمرينات العامة
على نظرية المعلومات

أجوبة التمرينات العامة على نظرية المعلومات

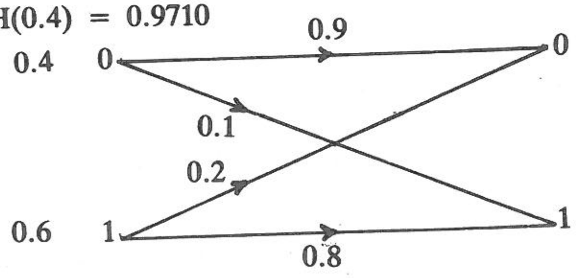
(1) i) $H(A) = 1.8465$

ii) $p(0) = \frac{1}{5}\,(.1 \times 5 + .2 \times 2 + .3 \times 1 + .4 \times 2) = 0.4 \Rightarrow$

$p(1) = 0.6$

$H_{binary} = H(0.4) = 0.9710$

iii)



a) $q_1 \equiv p(0) = 0.4 \times 0.9 + 0.6 \times 0.2 = 0.48 \Rightarrow$

$q_2 \equiv p(1) = 0.52$

b) $H\ (\text{Receiver}) = H(0.48) = 0.9988$

c)

$$P(Y\ X) = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \Rightarrow \pi = \begin{pmatrix} 0.36 & 0.04 \\ 0.12 & 0.48 \end{pmatrix}$$

$$H_{noise} \equiv H(Y\ X) = 0.62074$$

d) $C_{GBC} = C|_{\alpha=0.9,\ \beta=0.2} = 0.39777$

iv) a)

$d(c_1, c_2) = 3$ $\qquad$ $d(c_1, c_3) = 4$

$d(c_1, c_4) = 3$ $\qquad$ $d(c_2, c_3) = 3$

$d(c_2, c_4) = 4$ $\qquad$ $d(c_3, c_4) = 3$

$\Rightarrow d_{min} = 3 \Rightarrow$

الأخطاء الأحادية: تكتشف وتصحح

الأخطاء الثنائية: لا تكتشف عموما

b) $01111 \xrightarrow{\text{تصحح}} 01101$ $\qquad$ المسافة = ١

بينما كل المسافات

الأخرى > ١

$\longrightarrow a_2$

$10111 \xrightarrow{\text{صحيحة}} 10111$ $\qquad$ المسافة = صفر

لا توجد أخطاء

$\longrightarrow a_3$

$11100 \xrightarrow{\text{تصحح}} 01101$ أو 11010 $\qquad$ المسافة = ٢

وكل المسافات

الأخرى > ٢

$\longrightarrow a_2$ أو a_4

النتيجة: تصل جهة الاستقبال مجموعة الحروف

$a_2\ a_3\ a_2$ أو $a_2\ a_3\ a_4$

v) a) $\eta = \dfrac{H(x)}{L \log D} \alpha \dfrac{1}{L}$

فعندما تقل قيمة L من 5 إلى 2 تتحسن الكفاءة حيث تزداد بنسبة 5:2

$$\eta' = 2.5\ \eta$$

b) حينما تصبح $L = 2$ فإن $d_{min} = 1$

وبالتالي لا يمكن اكتشاف أو تصحيح أي أخطاء.

(2) $C = 1$ bit/sec. (or digit/sec.)

$$\begin{pmatrix} S \\ \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ & \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$$, indep.; Rate = 80 letters|min.

a) $H(S) = H(0.2) = 0.7219$ bits/letter

$$R_S = 0.7219 \times \frac{80}{60} = 0.96 \text{ bits/sec}$$

$$R_S < C\ (0.96 < 1)$$

b) 1. الطريقة الأولى

x_i	p_i	c_i
a	0.8	0
b	0.2	1

$L = 1$ digit/letter

$$R_e = 1 \times \frac{80}{60} = 1.33 \text{ digits/sec.}$$

لا يمكن للقناة أن تستوعب هذا المعدل R_e لأنه أكبر من سعة القناة $(R_e > C)$

2. الطريقة الثانية

x_i	p_i	c_i	ℓ_i
aa	0.64	0	1
ab	0.16	10	2
ba	0.16	110	3
bb	0.04	111	3

$$L = \sum_i p_i \ell_i = 1.56 \text{ digits/ 2 letters}$$
$$= \frac{1.56}{2} \text{ digits/letter} = 0.78 \text{ digits/letter}$$
$$R_c = 0.78 \times \frac{80}{60} = 1.04 \text{ digits/sec.}$$

مرة أخرى لا يمكن للقناة أن تستوعب هذا المعدل الذي يزيد عن سعة القناة.

3. الطريقة الثالثة

$$\begin{pmatrix} S^3 \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{aaa} & \text{aab} & \text{aba} & \text{abb} & \text{baa} & \text{bab} & \text{bba} & \text{bbb} \\ .512 & .128 & .128 & .032 & .128 & .032 & .032 & .008 \end{pmatrix}$$

x_i	p_i	c_i	l_i
aaa	.512	0	1
aab	.128	100	3
aba	.128	101	3
baa	.128	110	3
abb	.032	11100	5
bab	.032	11101	5
bba	.032	11110	5
bbb	.008	11111	5

$$L = \Sigma\, p_i\, \ell_i = 2.184 \text{ digits/ 3 letters}$$

$$= \frac{2.184}{3} \text{ digits/letter} = 0.728 \text{ digits/letter}$$

$$= 0.728 \times \frac{80}{60} \text{ digits/sec} = 0.9706 \text{ digits/sec.}$$

$$< C\ (= 1 \text{ digit/sec.})$$

c)

	a	b	a	a	a	a	b	a	a	a	a	a
I)	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
II)	10		0		0		110		0		0	
III)	101				0		110				0	

d)
$$\eta = \frac{H(X)}{L \log 2} = \frac{0.7219}{L}$$

$$\eta_I = \frac{0.7219}{1} = 72.19\%$$

$$\eta_{II} = \frac{0.7219}{0.78} = 92.55128\%$$

$$\eta_{III} = \frac{0.7219}{0.728} = 99.16208\%$$

(3). a)

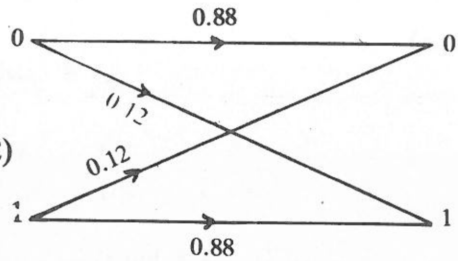
m_i	p_i	c_i
m_1	.25	111
m_2	.25	100
m_3	.25	010
m_4	.25	001

$$p(0) = \frac{0.25}{3}[0 + 2 + 2 + 2] = 0.5 \Rightarrow$$

$$p(1) = 0.5$$

b)

$$C|_{BSC} = 1 - H(\alpha)$$
$$= 1 - H(0.12)$$
$$= 0.4706$$



c) كفاءة إرسال المعلومات: هي النسبة بين معدل إرسال المعلومات وأقصى معدل ممكن (سعة القناة) لإرسال المعلومات

أما كفاءة الشفرة: فهي النسبة بين متوسط قيمة المعلومات التي يحملها الرمز الواحد من الشفرة إلى أقصى قيمة ممكنة للمعلومات التي يحملها الرمز الواحد.

$$\eta_{transmission} = \frac{I}{C}$$

$$[p(0) = p(1) = \tfrac{1}{2}] \Rightarrow I = C \Rightarrow \eta_{transmission} = 100\%$$

$$\eta_{coding} = \frac{H(X)}{L \log D} = \frac{H(X)}{3 \log 2}$$

$H(X) = \log 4 = 2$ (أربع رسائل متساوية الاحتمالات)

$$\therefore \eta_{coding} = \tfrac{2}{3} = 66.667\%$$

(4).a)

بفرض الاستقلال فإن احتمالات عناصر S′ هي :

$$\begin{pmatrix} S' \\ P(S') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_1 & x_1x_2 & x_2x_1 & x_2x_2 \\ p_1p_1 & p_1p_2 & p_2p_1 & p_2p_2 \end{pmatrix}$$

$$H(S) = -p_1\log p_1 - p_2\log p_2$$

$$H(S') = -p_1p_1\log p_1p_1 - p_1p_2\log p_1p_2$$

$$-p_2p_1\log p_2p_1 - p_2p_2\log p_2p_2$$

$$= -2p_1^2\log p_1 - 2p_1p_2(\log p_1 + \log p_2) - 2p_2^2\log p_2$$

$$= -2[(p_1\log p_1)(p_1+p_2) + (p_2\log p_2)(p_1+p_2)]$$

$$= -2[p_1\log p_1 + p_2\log p_2] = 2H(S)$$

حل آخر مختصر: بفرض الاستقلال

$$H(S') = H(S^2) = H(S\times S) = H(S)+H(S) = 2H(S)$$

b) $S = \{x_1, x_2\}$

$$P(S) = \left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right\}$$

$C = \{0,1\}$, $L_S = 1$ binit/symbol

$$S' = \{x_1x_1,\ x_1x_2,\ x_2x_1,\ x_2x_2\}$$

$$P(S') = \left\{\frac{4}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{9}\right\}$$

$$C = \{1, 01, 000, 001\}$$

$L_{S'} = \frac{17}{9}$ binits/2 symbols

$= \frac{17}{18}(= .94444)$ binits/symbol

$< 1 \equiv L_S$

c) $H(S) = .9182$ binits/symbol

$$\eta_S = \frac{.9182}{1\times 1} = 91.82\%$$

$$H(S') = 2H(S)$$

$$\eta_{S'} = \frac{2 \times .9182}{17/9} = 97.22\% > \eta_S$$

d) شفرة هوفهان الثلاثية

$$\begin{pmatrix} S \\ P(S) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$C = \{0, 1\}$$

$$\begin{pmatrix} S' \\ P(S') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_1 & x_1x_2 & x_2x_1 & x_2x_2 \\ \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

$$C = \{0 \ , \ 2 \ , \ 10 \ , \ 11\}$$

$L_{S'} = \frac{4}{3}$ binits/2 symbols

$= \frac{2}{3}$ binits/symbol

$< 1 \equiv L_S$

(5).1) i) $I_1 = \log 7 + \log N + \log 12 (N = 29 \text{ or } 30)$

$= 11.25029 \rightarrow 11.2992$ bits.

ii) $I_2 = \log 12 + \log N \ \ (N = 29 \text{ or } 30)$

$= 8.4428 \rightarrow 8.4917$ bits.

iii) $I_3 = \log 12 = 3.5849$ bits.

2) $I_{total} = I_1 + I_2 + 9I_3$

$= 51.9572 \rightarrow 52.0550$ bits.

(6) بتطبيق طريقة (مروجا) نحصل على قيم المتغيرات:

$t_1 = -0.696 \ , \ t_2 = -1.157 \ , \ t_3 = -0.85$

$$C = \log(2^{-.696} + 2^{-1.157} + 2^{-.85}) = 0.6964481$$

(7) a) $C_{lossless} = \log n = \log 2 = 1$ bit/symbol. (أ)

b) $C_{noiseless} = \log m = \log 4 = 2$ bits/symbol. (ب)

c) $C_{uniform} = \log 3 + (1-\alpha)\log(1-\alpha) + \alpha \log \alpha$ (جـ)

$= 1.5849 - H(\alpha)$ bits/symbol

d) $Q_{cascade} = \begin{pmatrix} .74 & .26 \\ .26 & .74 \end{pmatrix} \Rightarrow C = 1 - H(.26) = .17333$ (د)

bits/symbol

e) ٣ قنوات على التوازي (هـ)

$C_1 = C_3 = C_{ideal} = \log n = \log 1 = 0$

$C_2 = C_{uniform} = 0.5849$

f) $C - \log(2^0 + 2^{0.5849} + 2^0) = 1.8073$ bits/symbol

(و) واضح من شكل القناة وتماثلها بالنسبة لمدخليها أنها تبلغ سعتها عندما $p_1 = p_2 = 0.5$

$$Q = \begin{pmatrix} .7 & .1 & .2 \\ .2 & .1 & .7 \end{pmatrix} \Rightarrow \pi = \begin{pmatrix} .35 & .05 & .1 \\ .1 & .05 & .35 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow P(Y) = \{.45, .1, .45\}$

$C = I_{max} = [H(Y) - H(Y|X)]p = .5$

$= 0.2122$ bits/symbol

ملاحظة : يمكن أيضاً فرض $P(X) = \{p, 1-p\}$ والبحث عن قيمة p التي تجعل I تصل إلى قيمتها العظمى عن طريق الاشتقاق $0 = \frac{dI}{dP}$ (انظر مثلاً حل المسألة ٢ ـ ٢٩).

(8) 1. a) $C_{parallel} = \log(1 + 2^{1-H(p)})$ bits/symbol

b) $C_{BEC} = p$ bits/symbol

c) $C_{uniform} = 0.2139 \quad - H(p))$ bits/symbol

d) $C_{noiseless} = 1.5849$ bits/symbol

2. i) $I_{uniform} = 0.2$ bits/symbol

ii) $C_{uniform} = 0.2139$ bits/symbol (from (c) above)

iii) $\eta = 93.5\%$

iv) $R = 0.0139$ bits/symbol

(9) a,b) $C_1 = 1 - H(0.1) = 0.5310$ bits/symbol

$C_2 = 1 - H(0.2) = 0.2781$ bits/symbol

$C = \log(2^{.5310} + 2^{.2781}) = 1.4101$ bits/symbol

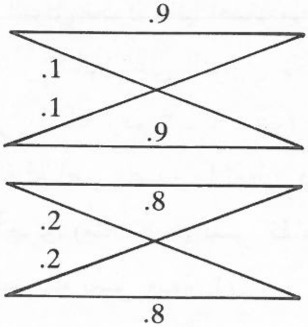
$p_1 = 2^{C_1 - C} = 0.5437 \Rightarrow p_2 = 0.4563$

وحيث أن كلاً من القناتين على التوازي قناة ثنائية متماثلة فهي تبلغ سعتها عندما يتساوى احتمالا العنصرين عند مدخليها

$$P_{opt} = \left\{ \frac{p_1}{2}, \frac{p_1}{2}, \frac{p_2}{2}, \frac{p_2}{2} \right\}$$

$$= \{0.27185, 0.27185, 0.22815, 0.22815\}$$

c) $\eta = \frac{I}{C}$



$$Q = \begin{pmatrix} .9 & .1 & 0 & 0 \\ .1 & .9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .8 & .2 \\ 0 & 0 & .2 & .8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \pi = \begin{pmatrix} .225 & .025 & 0 & 0 \\ .025 & .225 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .2 & .05 \\ 0 & 0 & .05 & .2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow P(Y) = \{0.25, 0.25, 0.25, 0.25\}$

$I(X,Y) = H(Y) - H(Y|X) = 1.40455$ bits/symbol

$\eta = 1.40455 / 1.4101 = 99.61\%$

(10)

(١) خاطئة. كلما زاد احتمال العنصر قلت قيمة المعلومات التي نحصل عليها بمعرفة حدوثه. السبب: $I(p) = -\log p$، فإذا زادت p قلت I.

(٢) صحيحة. السبب: خاصية النهاية العظمى.

(٣) خاطئة. المعلومات المتوقعة من تجربتين مستقلتين تساوي مجموع المعلومات المتوقعة من كل من التجربتين على انفراد.

(٤) صحيحة. السبب: بعض الرموز تضاف إلى رموز المعلومات للتحقق من صحة وصول رسائل المصدر (المعلومات).

(٥) صحيحة. السبب: سعة القناة خاصة بالقناة وليس بالمصدر، وهي تعتمد على مصفوفة القناة أي الاحتمالات الشرطية $p(y|x)$ وليس احتمالات عناصر المصدر $p(x)$.

(٦) خاطئة. كفاءة صياغة أي شفرة واضحة (u.d.) لعناصر مصدر معلومات، وكذلك كفاءة إرسال هذه المعلومات خلال قناة الاتصال لا يمكن أن تزيد عن ١٠٠٪.

(٧) صحيحة. السبب: قد تكون $H(Y|X) \neq 0$ بينما $H(X|Y) = 0$

(٨) خاطئة. سعة القناة المركبة من قناتين على التوالي تكون دائماً أصغر من أو تساوي أياً منهما، بينما سعة القناة المركبة من قناتين على التوازي تكون دائماً أكبر من أو تساوي أياً منهما (أنظر حل المسألة رقم ٢ ـ ٩ ـ ب).

(٩) خاطئة. طريقة هوفمان لصياغة شفرة لحظية لعناصر مصدر ما تعطى دائماً أعلى كفاءة ممكنة، وقد تعطي أي طريقة أخرى (مثلاً S-F) نفس كفاءتها بالنسبة لبعض المصادر (إذا أعطت هذه الطريقة نفس قيمة L).

(١٠) خاطئة. إذا كانت أقل مسافة بين كلمتي شفرة في مجموعة كلمات شفرة تساوي ٤، فإنه يمكن اكتشاف وتصحيح الأخطاء الأحادية، وكذلك اكتشاف الأخطاء الثنائية.

(١١) صحيحة. السبب:

$$2^k \geq m + 1 = 6 + 1 = 7$$

$$\Rightarrow k \geq \log 7 \Rightarrow k \geq 3$$

(١٢) خاطئة. كلما قل الطول الثابت لكلمات الشفرة القالبية زادت كفاءة الشفرة، وقلت إمكانية تصحيح الأخطاء. السبب:

أولاً: الكفاءة تتناسب عكسياً مع L.

ثانياً: كلما قل الطول الثابت لكلمات الشفرة نقصت أقل مسافة بين كلمتي شفرة، وبالتالي قلت إمكانية تصحيح الأخطاء.

(١٣) خاطئة. الشفرتان المختلفتان اختلافاً شكلياً يكون لهما نفس الكفاءة، بينما الشفرتان المختلفتان اختلافاً جوهرياً قد يكون لهما نفس الكفاءة وقد تكون كفاءتاهما مختلفتين. السبب: الكفاءة تعتمد على قيمة L، والشفرتان المختلفتان شكلياً يكون لهما نفس متوسط طول كلمة الشفرة L (وبالتالي نفس الكفاءة)، بينما الشفرتان المختلفتان جوهرياً إما أن يكون لهما نفس L (وبالتالي نفس الكفاءة) أو تختلفان في قيمة L (وبالتالي تختلفان في الكفاءة).

(11) i) a)

$$
\begin{aligned}
I(\text{أ}) &= -\log .112 = 3.1584 \text{ bits}\\
I(\text{ق}) &= -\log .022 = 5.5064 \text{ bits}\\
I(\text{ت}) &= -\log .023 = 5.4422 \text{ bits}\\
I(\text{ل}) &= -\log .076 = 3.7179 \text{ bits}\\
I(\text{و}) &= -\log .058 = 4.1078 \text{ bits}\\
I(\text{هـ}) &= -\log .044 = 4.5064 \text{ bits}\\
I(\text{م}) &= -\log .061 = 4.0350 \text{ bits}
\end{aligned}
$$

$$I_{total} = \Sigma I = 30.4741 \text{ bits} \equiv I_1$$

وباستخدام القيمة المتوسطة:

$$
\begin{aligned}
I_{total} &= 7 \times H(X)\\
&= 7 \times 3.9423 = 27.5961 \text{ bits} \equiv I_2
\end{aligned}
$$

هناك اختلاف بين القيمتين: $I_1 > I_2$. وبالطبع فإن I_1 المحسوبة عن طريق مجموع القيم الذاتية للمعلومات تكون أدق من I_2 المحسوبة عن طريق حاصل ضرب القيمة المتوسطة للمعلومات في عدد رموز الرسالة، وعموماً I_2 تقترب من القيمة الصحيحة I_1 عندما يكون عدد رموز الرسالة كبيراً، وتؤول إلى القيمة الصحيحة عندما يؤول عدد رموز الرسالة إلى المالانهاية.

b) $I_{total} = n \times H(X) = 44 \times 3.9423$

$= 173.4612$ bits

ii) S – F

	p_i $\times 10^{-3}$	x_i	
518	198	فراغ	000
	112	ا	001
	105	ي	010
	103	ن	011
239	76	ل	1000
	61	م	1001
	58	و	1010
	44	هـ	1011
243	119: 27	ر	11000
	26	ب	11001
	23	ت	11010
	22	ق	110110
	21	ع	110111
		ف	111000
		ک	111001
		س	111010
		د	111011
		ذ	1111000
		ح	1111001
		ج	1111010
		خ	1111011
		ش	1111100
		ص	11111010
		غ	11111011
		ز	11111100
		ض	11111101
		ث	11111110
		ط	111111110
		ظ	111111111

كلمة الشفرة المقابلة لكلمة (اقتلوهم) هي:

م	هـ	و	ل	ت	ق	أ
1001	1011	1010	1000	11010	110110	001

iii) شفرة قالبية

$$2^l \geq 29 \Rightarrow l_{min} = 5$$

كل رمز من رموز المصدر يعطي أي كلمة شفرة من خمسة أرقام ثنائية بحيث تكون كل الكلمات متباينة، ولذلك فقد تترجم الرسالة (اقتلوهم) إلى رسالة ثنائية مثل

م	هـ	و	ل	ت	ق	أ
00000	00001	00010	00011	00100	00101	00110

(12) i) $C_a = C_{noiseless} = \log m = \log 2 = 1$ bit/symbol

$C_b = C_{BSC} = 1 - H(0.3) = 0.1187$ bits/symbol

ii) $C = \log[2^1 + 2^{.1187}]$

$= 1.625626$

$p_a = 2^{c_a - c} = 2^{1-1.6256}$

$= 0.64815$

$\Rightarrow p_b = 0.35185$

$\text{BSC} \Rightarrow p_4 = p_5 = \frac{p_b}{2} = 0.1759$

القناة الأولى (أ) قناة عديمة الضوضاء وهي تصل إلى سعتها عندما تتساوى احتمالات المخارج:

$$q_1 = q_2$$

نفرض

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ p_a - \alpha - \beta \end{pmatrix}$$

$$Q_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \pi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \\ 0 & p_a - \alpha - \beta \end{pmatrix}$$

$$q_1 = q_2 \Rightarrow \alpha + \beta = p_a - \alpha - \beta \Rightarrow$$

$$\alpha + \beta = \frac{p_a}{2} = 0.3241$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ .3241 - \alpha \\ .3241 \end{pmatrix} \quad ; \quad 0 \leq \alpha \leq .3241$$

$$\Rightarrow P_{opt} = \begin{pmatrix} \alpha \\ .3241 - \alpha \\ .3241 \\ .1759 \\ .1759 \end{pmatrix}$$

α : عدد اختياري
بشرط
$0 \leqslant \alpha \leqslant 3241$

(13)a)

(أ) كل من الشفرتين A, B شفرة لحظية، حيث لا توجد أي كلمة هي امتداد لكلمة أخرى في الشفرة نفسها (جميع كلمات أي شفرة هي نهايات فروع الشجرة).

(ب) b) $L_A = 2.2$, $L_B = 2.2 = L_A \Rightarrow \eta_A = \eta_B$

$H(X) = 2.1220$

$$\eta_A = \eta_B = \frac{2.122}{2.2 \times 1} = 96.45\%$$

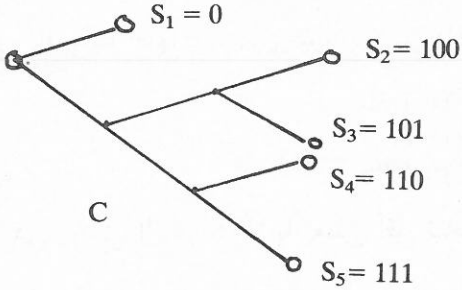
c)

(جـ) الشفرتان مختلفتان اختلافاً جوهرياً لأن أطوال كلمات الشفرة المتقابلة غير متطابقة

$$\{l_i\}_A = \{1,2,3,4,4\}$$

$$\{l_i\}_B = \{2,2,2,3,3\}$$

(د) d) $C_{S-F} = \{0,\ 100,\ 101,\ 110,\ 111\}$



(هـ) e) $L_{S-F} = 2.2 = L_A = L_B$

أعلى الشفرات كفاءة هي شفرة هوفمان فنحاول صياغتها. ولكننا بصياغتها نجد أيضاً أن:

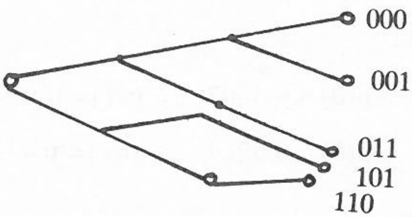
$$L_H \equiv L_{Huffman} = 2.2 = L_{S-F} = L_A = L_B$$

وبالتالي لا يمكن صياغة شفرة لحظية D أعلى كفاءة من الشفرات السابقة.

(و) أقصر شفرة قالبية لمصدر من خمسة عناصر يكون طول كل كلمة من كلماتها = ٣. نحاول تكوينها بحيث يتساوى احتمال ظهور كل من الصفر والواحد.

p_i	ω_i
0.4	011
0.2	000
0.2	110
0.1	001
0.1	101

$$\text{check } p(0) = \frac{.4+.6+.2+.2+.1}{3} = .5$$



$$p(0) = 0.5 = p(1) \Rightarrow H_{binary} = 1 \quad \text{bit/symbol}$$

وبالتالي فإن عدد الرموز الثنائية المطلوب إرسالها لنقل خمسة آلاف وحدة معلومات ثنائية هو ٥٠٠٠ رمز ثنائي (g)

(ز) الشفرات A, B, C لها أقل طول ممكن وهو 2.2، فجميعها متساوية في الكفاءة، وبالتالي فأفضلها أقلها (تباعداً) تبايناً بالنسبة للمتوسط L.

$$\begin{aligned} var(A) &= 1.36 \\ var(B) &= 0.16 \\ var(C) &= 0.96 \end{aligned}$$

أي أن الشفرة B هي أفضل الشفرات لأنها تعطي أقل تباين (0.16).

(14) a) $\eta = \dfrac{2.5219}{3 \times 1} = 84.06\%$

b) $S - F$:

$C_1 = \{0, 100, 101, 1100, 1101, 1110, 11110, 11111\}$

or $C_2 = \{00, 01, 100, 101, 1100, 1101, 1110, 1111\}$

$L_{S-F} = 2.6 \;\;,\;\; \eta_{S-F} = \dfrac{2.5219}{2.6 \times 1} = 96.996\%$

c) & d)

أكبر كفاءة شفرة لحظية يمكن الوصول إليها عملياً بطريقة هوفمان

$C = \{1, 01, 0010, 0011, 00010, 00011, 00000, 00001\}$

$L_H = 2.6$

$\eta_{max} = \eta_H = \eta_{S-F} = 96.996\%$

e) $\underline{R}$: $p(0) = 0.7 \quad , \quad p(1) = 0.3$

__S – F:__

in C_1 : $p(0) = 0.4807 \quad , \quad p(1) = 0.5193$

in C_2 : $p(0) = 0.5769 \quad , \quad p(1) = 0.4231$

نلاحظ أن احتمالي الصفر والواحد أقرب لبعضيهما البعض في الشفرة S-F عنهما في الشفرة R، ولذلك فمتوسط قيمة المعلومات للرمز الواحد في الشفرة S-F أكبر، وبالتالي نحتاج لعدد أقل من الرموز لنقل نفس الكمية من المعلومات، أي أن L أقل وبالتالي η أكبر.

f) <u>R</u>

$$T = \Sigma\, p_i t_i \;=\; .4\times3+.2\times5+.1(7+5)+$$
$$+.05\,(7+9+7+5)=4.8 \quad \text{seconds}$$

$$\text{or } T = 2.1\times1+0.9\times3 = 4.8 \quad \text{seconds}$$

<u>S – F</u>

$$\text{in } C_1:\; T = .4\times1+.2\times5+.1(7+8)+.05(10+10+13+15)$$
$$= 5.3 \text{ seconds}$$
$$\text{or } T = 1.25\times1+1.35\times3 = 5.3 \quad \text{seconds}$$

$$\text{in } C_2:\; T = .4\times2+.2\times4+.1(5+7)+.05(8+10+10+12)$$
$$= 4.8 \;\text{ seconds}$$

نلاحظ أن الشفرة R تعطى نفس قيمة متوسط زمن إرسال الرسالة الواحدة للمصدر كالشفرة S-F (في C_2) أو أقل منها (في C_1).

ملخـــص

لأهم قوانين نظرية المعلومات

أ ـ مقاييس المعلومات .

ب ـ نظم الاتصال وقنوات المعلومات .

ج ـ الشفرات .

ملخص لأهم قوانين نظرية المعلومات

(أ) مقاييس المعلومات

$$\begin{pmatrix} X \\ \\ P(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \; x_2 \; \dots \; x_n \\ \\ p_1 \; p_2 \; \dots \; p_n \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} Y \\ \\ P(Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \; y_2 \; \cdots \; y_m \\ \\ q_1 \; q_2 \; \cdots \; q_m \end{pmatrix}$$

$P(XY) = \{\pi_{ij}\}$, $\pi_{ij} = p(x_i, y_j) = p_i q_{ij} = q_j r_{ij}$, $q_{ij} = p(y_j|x_i)$,

$r_{ij} = p(x_i|y_j)$

$$p_i \equiv p(x_i) = \sum_{j=1}^{m} \pi_{ij}, \quad q_j \equiv p(y_j) = \sum_{i=1}^{n} \pi_{ij}$$

$I(p_i) = -\log p_i$ قيمة المعلومات الذاتية

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i \; \dots.$$

متوسط قيمة معلومات X
(entropy of X)

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^{m} q_j \log q_j$$

$$H(X,Y) = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \pi_{ij} \log \pi_{ij}$$

$$H(Y|X) = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \pi_{ij} \log q_{ij}$$

$$H(X|Y) = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \pi_{ij} \log r_{ij}$$

(ب) نظم الاتصال وقنوات المعلومات

متوسط قيمة المعلومات المتبادلة : $I(X,Y)$

$$= H(X) - H(X|Y)$$

$$= H(Y) - H(Y|X)$$

$$= H(X) + H(Y) - H(X,Y)$$

$$= -\sum_{i,j} \pi_{ij} \log \frac{p_i q_j}{\pi_{ij}}$$

سعة قناة المعلومات : C

$$= \max_{(p_1,\ p_2, \dots\ p_n)} I(X,Y)$$

η : كفاءة الإرسال $= \dfrac{I}{C}$

R : الإطناب $= C - I$

RR : الاطناب النسبي $= \dfrac{R}{C} = 1 - \dfrac{I}{C} = 1 - \eta$

قنوات خاصة:

(١) القناة المثالية: مصفوفة القناة قطرية $(n = m)$

$$C = \log n = \log m$$

(٢) القناة عديمة المفقودات: عنصر واحد فقط لا يساوي صفراً في أي عمود في المصفوفة $I = H(X),\ C = \log n$

(٣) القناة عديمة الضوضاء: عنصر واحد فقط لا يساوي صفراً في أي صف في المصفوفة $I = H(Y),\ C = \log m$

(٤) القناة المنتظمة: كل الصفوف متطابقة ما عدا ترتيب العناصر وكل الأعمدة متطابقة ما عدا ترتيب العناصر

$$I = H(Y) + \sum_j q_{ij} \log q_{ij}$$

$$C = \log m + \sum_j q_{ij} \log q_{ij} \quad \text{for any } i$$

$$p_i = \frac{1}{n} \Rightarrow q_j = \frac{1}{m} \Rightarrow I = C$$

(٥) القناة الثنائية المتماثلة BSC: $\begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix}$ وهي قناة منتظمة

$$C = 1 + \alpha \log \alpha + (1-\alpha) \log (1-\alpha) = 1 - H(\alpha)$$

(٦) قناة المحو الثنائية BEC: $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1-\alpha \\ 0 & \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}$

$$C = \alpha$$

(٧) القناة الثنائية العامة GBC: $\begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$

$$C = \frac{\alpha H(\beta) - \beta H(\alpha)}{\beta - \alpha} + \log \left[1 + 2^{\frac{H(\alpha) - H(\beta)}{\beta - \alpha}}\right]$$

$$P_{max} = \{p, 1-p\};\ p = \frac{1}{\beta - \alpha}\left[\beta - \frac{1}{1 + 2^{\frac{H(\beta) - H(\alpha)}{\beta - \alpha}}}\right]$$

سعة القناة المكافئة لقناتين متصلتين على التوازي سعتاهما C_1, C_2:

تعطى بالعلاقة $2^C = 2^{C_1} + 2^{C_2}$

طريقة «مروجا» (Muroga) لحساب سعة قناة ذات مصفوفة مربعة $Q_{n\times n}$:

$$C = \log(2^{t_1} + 2^{t_2} + \ldots + 2^{t_n})$$

حيث $t_1, t_2, \ldots, t_n$ هي حل النظام الخطي :

$$q_{11}t_1 + \ldots + q_{1n}t_n = \sum_{j=1}^{n} q_{1j}\log q_{1j}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$q_{n1}t_1 + \ldots + q_{nn}t_n = \sum_{j=1}^{n} q_{nj}\log q_{nj}$$

اختزال القنوات : إذا كانت عناصر عمود في مصفوفة قناة υ في تناسب طردي مع العناصر المقابلة لها في عمود آخر، أمكن جمع العناصر المتقابلة في العمودين لنحصل على قناة مختصرة υ'، المعلومات المتبادلة خلالها تساوي المعلومات المتبادلة خلال القناة الأصلية υ لأي توزيع احتمالي عند المدخل.

(ح) الشفرات

نفرض أن مجموعة الرسائل هي : $x_1, x_2, \ldots, x_n$

واحتمالاتها : $p_1, p_2, \ldots, p_n$

وكلمات الشفرة المقابلة لها : $c_1, c_2, \ldots, c_n$

وأطوال هذه الكلمات : $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$

∴ متوسط طول كلمة الشفرة: $L = \sum_{i=1}^{n} p_i \ell_i$

بالنسبة للشفرات الواضحة (u.d.): $L \geqslant \dfrac{H(x)}{\log D}$

حيث D: عدد رموز الشفرة (في المجموعة الأبجدية للشفرة)

كفاءة الشفرة: $\eta = \dfrac{H(X)}{L \log D}$

إذا استخدمنا شفرة ثنائية تستعمل الرمزين {0,1}

وكان عدد الأصفار في كلمات الشفرة: $\ell_{1,0}, \ell_{2,0} \ldots, \ell_{n,0}$

وعدد الآحاد في كلمات الشفرة: $\ell_{1,1}, \ell_{2,1}, \ldots, \ell_{n,1}$

فإن احتمال ظهور الصفر هو: $p(0) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} p_i \ell_{i,0}}{L}$

واحتمال ظهور الواحد: $p(1) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} p_i \ell_{i,1}}{L}$

$p(0) + p(1) = 1$

طريقة شانون- فانو لصياغة شفرة لحظية :التجزئة إلى مجموعات جزئية متساوية الاحتمالات قدر الاستطاعة

طريقة هوفمان لصياغة شفرة مثلى (أي لحظية ومتراصة - أي متوسط طول الكلمة أقل ما يمكن): تجميع الرموز ذوات أقل احتمالات مبتدئين بعدد من الرموز يساوي $(n-2) \quad R_D + 2$

يشترط في طريقة هامنج لتصحيح الأخطاء الأحادية : $2^k \geqslant m + 1$

حيث: m = عدد أرقام المعلومات

k = عدد أرقام التحقق.

جداول الاحتمالات
ومقاييس المعلومات واللوغاريتمات

Entropy of a Binary Source

p	-p log p	-(1 - p) log(1 - p)	H(p)
0	0	0	0
0.01	0.0664	0.0144	0.0808
0.02	0.1129	0.0285	0.1414
0.04	0.1858	0.0565	0.2423
0.06	0.2435	0.0839	0.3274
0.08	0.2915	0.1107	0.4022
0.10	0.3322	0.1368	0.4690
0.12	0.3671	0.1623	0.5294
0.14	0.3971	0.1871	0.5842
0.16	0.4230	0.2113	0.6343
0.18	0.4453	0.2348	0.6801
0.20	0.4644	0.2575	0.7219
0.22	0.4806	0.2796	0.7602
0.24	0.4941	0.3009	0.7950
0.26	0.5053	0.3214	0.8267
0.28	0.5142	0.3412	0.8554
0.30	0.5211	0.3602	0.8813
0.32	0.5260	0.3784	0.9044
0.34	0.5292	0.3956	0.9248
0.36	0.5306	0.4121	0.9427
0.38	0.5304	0.4276	0.9580
0.40	0.5288	0.4422	0.9710
0.42	0.5257	0.4558	0.9815
0.44	0.5212	0.4684	0.9896
0.46	0.5154	0.4800	0.9954
0.48	0.5083	0.4905	0.9988
0.50	0.5000	0.5000	1.0000

$H(p) = -p \log p - (1-p) \log (1-p)$ bits
$H(p) = H(1-q)\,, \qquad p + q = 1$

جدول متوسط قيمة المعلومات لمصدر ثنائي

Logarithms to the Base 2

n	log n	n	log n
1	0.0000	26	4.7004
2	1.0000	27	4.7548
3	1.5849	28	4.8073
4	2.0000	29	4.8579
5	2.3219	30	4.9068
6	2.5849	31	4.9541
7	2.8073	32	5.0000
8	3.0000	33	5.0443
9	3.1699	34	5.0874
10	3.3219	35	5.1292
11	3.4594	36	5.1699
12	3.5849	37	5.2094
13	3.7004	38	5.2479
14	3.8073	39	5.2854
15	3.9068	40	5.3219
16	4.0000	41	5.3575
17	4.0874	42	5.3923
18	4.1699	43	5.4262
19	4.2479	44	5.4594
20	4.3219	45	5.4918
21	4.3923	46	5.5235
22	4.4594	47	5.5545
23	4.5235	48	5.5849
24	4.5849	49	5.6147
25	4.6438	50	5.6438

جدول اللوغاريتمات للأساس ٢

جـدول الـدوال

$-\log p$, $-p \log p$, $H(p)$

Five-place Tables of the Functions:
$\log_2(1/p)$, $p \log_2(1/p)$, $H_2(p)$ for p 0.00(0.01)1.00

P	*log(1/p)*	*p log(1/p)*	*H(p)*
0.00	-	0	0
0.01	6.64386	0.06644	0.08079
0.02	5.64386	0.11288	0.14144
0.03	5.05889	0.15177	0.19439
0.04	4.64386	0.18575	0.24229
0.05	4.32193	0.21610	0.28640
0.06	4.05889	0.24353	0.32744
0.07	3.83650	0.26856	0.36592
0.08	3.64386	0.29151	0.40218
0.09	3.47393	0.31265	0.43647
0.10	3.32193	0.33219	0.46900
0.11	3.18442	0.35029	0.49992
0.12	3.05889	0.36707	0.52936
0.13	2.94342	0.38264	0.55744
0.14	2.83650	0.39711	0.58424
0.15	2.73697	0.41054	0.60984
0.16	2.64386	0.42302	0.63431
0.17	2.55639	0.43459	0.65770
0.18	2.47393	0.44531	0.68008
0.19	2.39593	0.45523	0.70147

P	*log(1/p)*	*p log (1/p)*	*H(p)*
0.20	2.32193	0.46439	0.72193
0.21	2.25154	0.47282	0.74148
0.22	2.18442	0.48057	0.76017
0.23	2.12029	0.48767	0.77801
0.24	2.05889	0.49413	0.79504
0.25	2.00000	0.50000	0.81128
0.26	1.94342	0.50529	0.82675
0.27	1..88897	0.51002	0.84146
0.28	1.83650	0.51422	0.85545
0.29	1.78588	0.51790	0.86872
0.30	1.73697	0.52109	0.88129
0.31	1.68966	0.52379	0.89317
0.32	1.64386	0.52603	0.90438
0.33	1.59946	0.52782	0.91493
0.34	1.55639	0.52917	0.92482
0.35	1.51457	0.53010	0.93407
0.36	1.47393	0.53062	0.94268
0.37	1.43440	0.53073	0.95067
0.38	1.39593	0.53045	0.95804
0.39	1.35845	0.52980	0.96480
0.40	1.32193	0.52877	0.97095
0.41	1.28630	0.52738	0.97650
0.42	1.25154	0.52565	0.98145
0.43	1.21754	0.52356	0.98582
0.44	1.18442	0.52115	0.98959
0.45	1.15200	0.51840	0.99277
0. 46	1.12029	0.51534	0.99538
0.47	1.08927	0.51596	0.99740
0.48	1.05889	0.50827	0.99885
0.49	1.02915	0.50428	0.99971
0.50	1.00000	0.50000	1.00000
0.51	0.97143	0.49543	0.99971
0.52	0.94342	0.49058	0.99885
0.53	0.91594	0.48545	0.99740
0.54	0.88897	0.48004	0.99538
0.55	0.86250	0.47437	0.99277
0.56	0.83650	0.46844	0.98959
0.57	0.18097	0.46225	0.98582
0.58	0.78588	0.45581	0.98145
0.59	0.76121	0.44912	0.97650
0.60	0.73697	0.44218	0.97095
0.61	0.71312	0.43500	0.96480
0.62	0.68966	0.42759	0.95804
0.63	0.66658	0.41994	0.95067
0.64	0.64386	0.41207	0.94268

P	*log(1/p)*	*p log (1/p)*	*H(p)*
0.65	0.62149	0.40397	0.93407
0.66	0.59946	0.39564	0.92482
0.67	0.57777	0.38710	0.91493
0.68	0.55639	0.37835	0.90438
0.69	0.53533	0.36938	0.89317
0.70	0.51457	0.36020	0.88129
0.71	0.49411	0.35082	0.86872
0.72	0.47393	0.34123	0.85545
0.73	0.45403	0.33144	0.84146
0.74	0.43440	0.32146	0.82675
0.75	0.41504	0.31128	0.81128
0.76	0.39593	0.30091	0.79504
0.77	0.37707	0.29034	0.77801
0.78	0.35845	0.27959	0.76017
0.79	0.34008	0.26866	0.74148
0.80	0.32193	0.25754	0.72193
0.81	0.30401	0.24625	0.70147
0.82	0.28630	0.23477	0.68008
0.83	0.26882	0.22312	0.65770
0.84	0.25154	0.21129	0.63431
0.85	0.23447	0.19930	0.60984
0.86	0.21759	0.18713	0.58424
0.87	0.20091	0.17479	0.55744
0.88	0.18442	0.16229	0.52936
0.89	0.16812	0.14963	0.49992
0.90	0.15200	0.13680	0.46900
0.91	0.13606	0.12382	0.43647
0.92	0.12029	0.11067	0.40218
0.93	0.10470	0.09737	0.36592
0.94	0.08927	0.08391	0.32744
0.95	0.07400	0.07030	0.28640
0.96	0.05889	0.05654	0.24229
0.97	0.04394	0.04263	0.19439
0.98	0.02915	0.02856	0.14144
0.99	0.01450	0.01435	0.08079
1.00	0.00000	0.00000	0.00000

دليل المصطلحات العربية والانجليزية

دليل المصطلحات العربية والانجليزية

Index

فيما يلي قائمة بمصطلحات نظرية المعلومات في اللغة الإنجليزية مرتبة ترتيبا أبجديا ، والمصطلحات المرادفة لها في اللغة العربية ، مع أرقام الصفحات التي ظهرت فيها هذه المصطلحات .

المراجـع

أسماء بعض الكتب والمراجع عن نظرية المعلومات

Books and References on Information Theory

فيما يلي قائمة بأسماء بعض الكتب والمراجع عن نظرية المعلومات وتطبيقاتها في المجالات المختلفة ، والقائمة مرتبة ترتيبا أبجديا بالنسبة لأسماء المؤلفين .

* Abramson, N.
  Information Theory and Coding
  McGraw Hill, New York, 1963.

* Aczel, J. - Daroczy, Z.
  On measures of Information and their Characterizations
  Academic Press, New York, 1975.

* Ash, R.
  Information Theory
  Interscience Publishers, A Division of John Wiley, New York.

* Fano, R.
  Transmission of Information, A Statistics Theory of Communications
  The M.I.T. Press, Cambridge, Mass.; Wiley, New York, 1961.

* Feinstein, A.
  Foundations of Information Theory
  McGraw Hill, New York, 1958.

* Gallager, R.G.
  Information Theory and Reliable Communication
  John Wiley, New York, 1968.

* Gatlin, L.
  Information Theory and The Living System
  Columbia University Press, New York, 1972.

* Guiasu, S.
  Information Theory with Applications
  McGraw Hill, New York, 1977.

* Hamming, R.W.
  Coding and Information Theory
  Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1980.

* Ingels, F.
  Information and Coding Theory
  Intext Educational Publishers, Scranton, San Francisco, 1971.

* Jelinek, F.
  Probabilistic Information Theory, Discrete and Memoryless Models
  McGraw Hill, New York, 1968.

* Jones, D.S.
  Elementary Information Theory
  (Oxford Applied Math. and Computing Science Series)
  Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 1979.

* Karbowiak, A.E.
  Theory of Communication
  Oliver and Boyd, Edinburgh, 1969.

* McEliece, R.J.
  The Theory of Information and Coding
  Addison Wesley, Reading, Mass., 1977.

* Raisbeck, G.
  Information Theory, An Introduction for Scientists and Engineers
  The Massachusetts Institute of technology (M.I.T.) Press, Cambridge, Mass., 1964.

* Reza, F.M.
  An Introduction to Information Theory
  McGraw Hill, New York, 1961.

* Young, J.F.
  Information Theory
  Butterworth, London, 1971

* Yu, F.T.
  Optics and Information Theory
  John Wiley, New York.

ٱعۡلَمُوٓاْ أَنَّمَا ٱلۡحَيَوٰةُ ٱلدُّنۡيَا لَعِبٞ وَلَهۡوٞ وَزِينَةٞ
وَتَفَاخُرُۢ بَيۡنَكُمۡ وَتَكَاثُرٞ فِي ٱلۡأَمۡوَٰلِ وَٱلۡأَوۡلَٰدِۖ كَمَثَلِ غَيۡثٍ
أَعۡجَبَ ٱلۡكُفَّارَ نَبَاتُهُۥ ثُمَّ يَهِيجُ فَتَرَىٰهُ مُصۡفَرّٗا ثُمَّ يَكُونُ
حُطَٰمٗاۖ وَفِي ٱلۡأٓخِرَةِ عَذَابٞ شَدِيدٞ وَمَغۡفِرَةٞ مِّنَ ٱللَّهِ
وَرِضۡوَٰنٞۚ وَمَا ٱلۡحَيَوٰةُ ٱلدُّنۡيَآ إِلَّا مَتَٰعُ ٱلۡغُرُورِ ٢٠

(سورة الحديد - ٢٠)

كتب للمؤلف

من منشورات دار القلم . . . الكويت

١ ـ برمجة الحاسب بلغة الفورتران، ط ٤، ١٩٩٢ .

٢ ـ مقدمة في نظرية المعلومات، ط ٢، ١٩٩٣ .

٣ ـ الشبكات الرقمية، ١٩٨٦ .

٤ ـ التحليل العددي، ١٩٨٨ .

٥ ـ الجبر الخطي، ١٩٨٨ .

٦ ـ برمجة الحاسب بلغة الباسكال، ١٩٨٩ .

٧ ـ الدوائر المتكاملة الرقمية (ترجمة)، ١٩٩٣ .